

Avant le sudoku : le carré latin magique⁽¹⁾

Pierre Dagnelie

Faculté universitaire des Sciences agronomiques

B-5030 Gembloux (Belgique)

pierre@dagnelie.be

Résumé

Cette note met en évidence la similitude entre le jeu de sudoku, qui connaît un engouement considérable depuis 2005, et la notion de carré latin magique, qui a été présentée par Federer en 1955, dans le domaine de l'expérimentation agronomique.

Summary

This note stresses the similarity between the sudoku game, that has a considerable expansion since 2005, and the concept of magic Latin square, presented by Federer in 1955, in the field of agricultural experiments.

Mots-clés – Keywords

Sudoku, plan d'expérience, carré latin, carré gréco-latin ; experimental design, Latin square, Graeco-Latin square.

Le sudoku

Sous sa forme la plus courante, le sudoku est un jeu qui a pour objectif de compléter une grille carrée de neuf lignes et neuf colonnes, divisée en neuf blocs de trois lignes et trois colonnes, de telle sorte que tous les chiffres de 1 à 9 figurent une et une seule fois dans chacune des lignes, dans chacune des colonnes et dans chacun des blocs. En voici un exemple relativement simple, présenté d'une part sous sa forme à résoudre et d'autre part, pour la même grille, sous sa forme résolue :

4					9		3	
3		6				8		4
	8				2			
		1	9		7			5
			2		5		7	1
		9		1	6			
7						6		
	9	8	5	7				
	5		6	2		7	4	

4	1	5	8	6	9	2	3	7
3	2	6	7	5	1	8	9	4
9	8	7	3	4	2	5	1	6
2	3	1	9	8	7	4	6	5
8	6	4	2	3	5	9	7	1
5	7	9	4	1	6	3	8	2
7	4	2	1	9	3	6	5	8
6	9	8	5	7	4	1	2	3
1	5	3	6	2	8	7	4	9

⁽¹⁾ *Revue Modulad* 39, 172-175, 2008 (<www.modulad.fr>).

Ce jeu a connu une expansion considérable à partir de l'année 2005. Actuellement, différents sites web et de nombreux quotidiens et hebdomadaires en proposent des grilles à leurs lecteurs, au même titre que des mots croisés par exemple. Des publications spécialisées, des compétitions, des clubs, etc. lui sont aussi consacrés, et différentes variantes, telles que des grilles 4×4 , 6×6 et 16×16 , ont été introduites.

Dans les historiques qui le concernent, le sudoku est généralement mis en relation avec les concepts de carré latin et de carré gréco-latin, et plus spécifiquement parfois avec le problème des 36 officiers d'Euler. Il nous a paru opportun de mettre en évidence la relation, beaucoup plus étroite, avec la notion plus confidentielle de carré latin magique.

Le carré latin

Le carré latin est une grille carrée constituée d'un même nombre de lignes que de colonnes, les différentes cellules de la grille contenant une série d'objets (chiffres, lettres ou tout autre type d'objets), qui sont présents chacun une et une seule fois dans chaque ligne et dans chaque colonne. Voici, à titre d'illustration, deux exemples de carrés latins 4×4 :

D	A	B	C
C	B	A	D
A	D	C	B
B	C	D	A

♣	♠	♦	♥
♦	♥	♣	♠
♥	♦	♠	♣
♠	♣	♥	♦

À la suite principalement des travaux de R.A. Fisher, le carré latin est utilisé de façon relativement courante en recherche agronomique depuis les années 1920⁽¹⁾. Dans une expérience en champ destinée par exemple à comparer les rendements de plusieurs variétés d'une même céréale, le carré latin permet d'éliminer de l'analyse des résultats les différences de fertilité ou de conditions de croissance selon deux directions perpendiculaires (lignes et colonnes) et, de ce fait, d'augmenter la précision relative à la comparaison des variétés [Dagnelie, 2003]. De même, le carré latin et certaines de ses extensions, dont le *cross-over*, sont largement utilisés à l'heure actuelle en recherche biomédicale.

Le carré gréco-latin

Le carré gréco-latin peut être considéré comme étant le résultat de la superposition de deux carrés latins tels que chacun des objets de l'un est alors associé une et une seule fois à chacun des objets de l'autre. Tel est le cas pour les deux carrés latins présentés ci-dessus : par superposition, le trèfle est en effet associé à la lettre D dans la première ligne, à la lettre A dans la deuxième ligne, à la lettre B dans la troisième ligne, à la lettre C dans la quatrième ligne, etc.⁽²⁾

(1) Fisher fait état du carré latin, comme dispositif expérimental, dès la première édition de son livre *Statistical methods for research workers* [Fisher, 1925]. Mais le principe du carré latin avait déjà été appliqué occasionnellement longtemps auparavant, notamment par Cretté de Palluel à la fin du dix-huitième siècle [Cretté de Palluel, 1788, 1790 ; Ullrich, 2002].

(2) Les carrés latins qui permettent de construire ainsi un carré gréco-latin sont dits orthogonaux ou mutuellement orthogonaux.

Le carré gréco-latin est aussi utilisé parfois, mais beaucoup plus rarement que le carré latin, en recherche agronomique.

Le problème, insoluble, des 36 officiers d'Euler, qui est souvent associé au sudoku, est en fait relatif au carré gréco-latin 6×6 ⁽¹⁾.

Le carré latin magique

La notion de carré latin magique est présentée notamment par Federer dans son livre *Experimental design : theory and application*, publié en 1955 [Federer, 1955]. Toujours dans l'optique de l'expérimentation agronomique, le principe exposé par Federer est de constituer, à l'intérieur d'un carré latin, un certain nombre de blocs, carrés ou rectangulaires, qui contiennent chacun une et une seule fois chacun des objets qui sont comparés. Il s'agit là exactement du principe du sudoku.

Les deux exemples suivants sont extraits d'un article que nous avons publié dans la même ligne en 1959, au sujet de l'analyse des résultats des expériences en carré latin magique [Dagnelie, 1959] :

A	B	E	C	F	D
C	F	A	D	E	B
D	E	B	F	C	A
B	A	F	E	D	C
E	D	C	A	B	F
F	C	D	B	A	E

F	H	C	E	A	G	D	I	B
G	E	D	B	I	H	C	A	F
B	A	I	F	C	D	H	G	E
C	D	F	A	G	E	B	H	I
A	I	B	D	H	F	G	E	C
H	G	E	I	B	C	A	F	D
D	C	H	G	E	I	F	B	A
E	B	G	C	F	A	I	D	H
I	F	A	H	D	B	E	C	G

Il s'agit bien, d'une part, d'un sudoku 6×6 , comprenant six blocs rectangulaires, et d'autre part, d'un sudoku classique 9×9 .

Conclusion

Si le sudoku est bien lié au carré latin, il n'a par contre aucun lien particulier avec le carré gréco-latin, ni donc avec le problème d'Euler. Mais il correspond parfaitement au concept de carré latin magique, tel qu'il a été présenté par Federer [1955].

⁽¹⁾ Dans un mémoire présenté en 1779 à l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg et publié en 1782, Euler considère "36 officiers, de six différens grades et tirés de six régimens différens", et s'efforce de les "ranger dans un quarré de manière que sur chaque ligne, tant horizontale que verticale, il se trouvât six officiers tant de différens caractères que de régimens différens" [Euler, 1782]. Il conclut que "un tel arrangement est absolument impossible", mais la preuve formelle de cette conjecture, c'est-à-dire l'absence de tout carré gréco-latin 6×6 , n'a été établie qu'à la fin du dix-neuvième siècle.

Bibliographie

Les différents sites web qui sont mentionnés ont été consultés en dernier lieu le 22.09.2007.

- Cretté de Palluel F. [1788]. Mémoire sur les avantages et l'économie que procurent les racines employées à l'engrais des moutons à l'étable. *Mémoires d'Agriculture*, Trimestre d'été, 17-23.
- Cretté de Palluel F. [1790]. On the advantage and economy of feeding sheep in the house with roots. *Annals of Agriculture* **14**, 133-139.
- Dagnelie P. [1959]. Le carré latin magique : technique d'analyse de la variance. *Revue de l'Agriculture* **12** (3), 233-242 ; <www.dagnelie.be/autrepub.html>.
- Dagnelie P. [2003]. *Principes d'expérimentation : planification des expériences et analyse de leurs résultats*. Gembloux, Presses agronomiques, 397 p. ; <www.dagnelie.be/exaccess1.html>.
- Euler L. [1782]. Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques. *Verhandelingen van het Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen* **9**, 85-239 ; <www.math.dartmouth.edu/~euler/pages/E530.html>.
- Federer W.T. [1955]. *Experimental design : theory and application*. New York, Macmillan, 544 + 47 p.
- Fisher R.A. [1925]. *Statistical methods for research workers*. Edinburgh, Oliver and Boyd ; <psychclassics.yorku.ca/Fisher/Methods>.
- Ullrich P. [2002]. Officers, playing cards, and sheep : on the history of Eulerian squares and of the design of experiments. *Metrika* **56** (3), 189-204.