

Chapitre 5

Les expériences complètement aléatoires

Sommaire

5.1 Principes

5.2 Analyse des résultats

5.3 Discussion

5.4 Exemple 1 : expérience complètement aléatoire à deux facteurs

5.4.1 Présentation et données

5.4.2 Analyse des résultats

5.4.3 Importance de la randomisation

5.5 Exemple 2 : expérience complètement aléatoire à quatre facteurs

⊖ 5.5.1 Présentation et données

⊖ 5.5.2 Interprétation des résultats : analyse de la variance

⊖ 5.5.3 Interprétation des résultats : demi-diagramme de probabilité

⊖ 5.5.4 Interprétation des résultats : régression multiple

⊖ 5.5.5 Étude de deux expériences factorielles fractionnaires

5.1 Principes

1° Notion d'expérience complètement aléatoire

Une première manière de se prémunir contre d'éventuelles fluctuations des facteurs non contrôlés, dans l'espace et/ou dans le temps, est de procéder à une affectation complètement aléatoire des différents objets aux différentes unités expérimentales. Cette opération de répartition « au hasard » est appelée *randomisation* ou, plus rarement, *casualisation*¹.

Les dispositifs expérimentaux conçus de cette manière sont dits *aléatoires* ou *complètement aléatoires*, ou encore *randomisés* ou *complètement randomisés*². La figure 5.1.1 en présente deux exemples.

4	1	5	2	4	3	4	4
3	5	2	6	2	7	4	8
1	9	5	10	5	11	3	12
1	13	2	14	2	15	3	16
3	17	1	18	5	19	1	20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
22	23	23	11	13	22	21	33	13	32	12	31	33	11	12	21	32	31

Figure 5.1.1. Exemples d'expériences complètement aléatoires.

La première partie de cette figure illustre ce que peut être une expérience en champ qui comporterait cinq objets, numérotés de 1 à 5, et quatre répétitions de chacun des objets. Les numéros des objets sont indiqués au centre des parcelles, de forme rectangulaire, et les numéros des parcelles dans leur coin inférieur droit. L'objet 1 est ainsi affecté aux parcelles 9, 13, 18 et 20, etc.

La deuxième partie de la figure 5.1.1 correspond au cas d'une expérience factorielle 3^2 (§ 2.3.2), comportant donc neuf objets, avec deux répétitions. On suppose ici que les 18 essais individuels (9 objets \times 2 répétitions) doivent être effectués successivement, par exemple dans un même four ou un même fermenteur. Les premiers numéros sont les numéros d'ordre des essais, et les seconds numéros les numéros des objets, exprimés comme au paragraphe 2.3.2.5°. L'objet 11 (modalité 1 de chacun des deux facteurs) figure en position 4 et 14, etc.

¹ En anglais : *randomization*.

² En anglais : *randomized design, completely randomized design*.

2° Répartition « au hasard »

La répartition aléatoire ou « au hasard » des objets peut être réalisée à l'aide de tables de *nombre aléatoires*³ [STAT1, § 8.2.2] ou de *permutations aléatoires*⁴, telles qu'il en existe dans de nombreux livres de statistique et dans certains recueils de tables [FISHER et YATES, 1982; PEARSON et HARTLEY, 1966-1972]. De brèves tables de permutations aléatoires des nombres de 1 à 10, de 1 à 20 et de 1 à 50 sont aussi données en annexe (tables 1.1 à 1.3).

Dans les deux cas envisagés ci-dessus, nous avons procédé à la répartition au hasard en nous servant de la table des permutations aléatoires des nombres de 1 à 20 (table 1.2).

Dans le premier cas (partie supérieure de la figure 5.1.1), nous avons utilisé le deuxième « bloc » de 20 nombres de la partie gauche de cette table, et nous avons affecté l'objet 1 aux parcelles dont les numéros correspondent aux quatre premiers nombres de la table (parcelles 13, 20, 18 et 9), l'objet 2 aux parcelles dont les numéros correspondent aux quatre nombres suivants (parcelles 6, 15, 7 et 14), etc.

Quant au deuxième cas (partie inférieure de la figure 5.1.1), nous avons agi de la même manière, en utilisant le cinquième « bloc » de la partie droite de la même table et en négligeant les valeurs 19 et 20, qui sont superflues. C'est ainsi que l'objet 11 a été associé aux numéros d'ordre 14 et 4, l'objet 12 aux numéros d'ordre 15 et 11, etc.

La randomisation peut également être réalisée en utilisant des *nombre pseudo-aléatoires*⁵ [STAT1, § 8.2.3], générés par certaines calculatrices ou par ordinateur, à l'aide de logiciels semblables à ceux auxquels nous avons fait allusion dans l'introduction générale.

3° Domaine médical

Le premier exemple présenté ci-dessus est de type agronomique, tandis que le deuxième concerne plutôt une expérience à réaliser en laboratoire ou de type industriel.

Des expériences organisées de cette manière sont aussi envisagées dans le domaine médical. Elles sont alors tantôt qualifiées, comme ci-dessus, d'expériences aléatoires ou complètement aléatoires, et tantôt appelées expériences *en groupes parallèles*⁶.

Indépendamment des questions éthiques (§ 2.2.2.5°), la réalisation de ces expériences peut soulever des problèmes particuliers quand les personnes considérées sont des patients qui ne sont pas tous « disponibles » en une fois, mais qui, au

³ En anglais : *random number*.

⁴ En anglais : *random permutation*.

⁵ En anglais : *pseudo-random number*.

⁶ En anglais : *parallel group design*.

contraire, entrent progressivement dans le processus expérimental, par exemple au fur et à mesure de leur admission en milieu hospitalier. La randomisation doit alors être réalisée elle-même progressivement, tout en conservant le caractère aveugle de la répartition des différents traitements (§ 2.2.2.4°).

[En outre, on peut noter qu'en matière agronomique, aucune distinction n'est généralement faite entre le cas où les unités expérimentales sont constituées d'individus isolés (un seul animal ou un seul arbre par unité expérimentale, par exemple) et le cas où les unités expérimentales sont constituées de plusieurs individus (unités expérimentales correspondant à des lots d'animaux ou à des groupes d'arbres, par exemple).

Par contre, une distinction intervient dans le domaine médical. Les expériences au cours desquelles les objets sont affectés de manière complètement aléatoire à des groupes de personnes ou de patients, et non pas à des personnes considérées individuellement, sont en effet fréquemment envisagées séparément, sous le nom de *group randomized design* ou *cluster randomized design* [KLAR et DONNER, 2001 ; MOERBEEK, 2005 ; MURRAY, 2001].

5.2 Analyse des résultats

1° Analyse de la variance

La méthode d'analyse des résultats qui est associée le plus couramment au dispositif expérimental complètement aléatoire est l'*analyse de la variance*⁷ : analyse de la variance à un critère de classification pour un seul facteur et parfois pour les expériences non factorielles à deux ou plusieurs facteurs [STAT2, § 9.2 et 9.3], analyse de la variance à deux critères de classification pour les expériences factorielles à deux facteurs [STAT2, § 10.2 et 10.3], etc.

Dans toute la mesure du possible, l'analyse de la variance doit toujours être précédée des contrôles habituels, en matière de normalité des distributions [STAT2, § 3.2, 3.3 et 3.4], d'identification d'éventuelles observations aberrantes [STAT2, § 3.5], et d'égalité des variances [STAT2, § 7.5]. Elle peut aussi être précédée de transformations de variables [STAT2, § 4.2, 4.3 et 4.4], et elle peut être complétée par des calculs de régression et par la réalisation de comparaisons particulières ou de comparaisons multiples de moyennes [STAT2, § 12.2, 12.3 et 12.4]⁸.

2° Autres méthodes

L'analyse de la variance peut être remplacée par certaines méthodes non paramétriques, dont le test de KRUSKAL et WALLIS [STAT2, § 9.3.6], notamment dans

⁷ En anglais : *analysis of variance*, ANOVA.

⁸ Nous ne présenterons de façon détaillée les résultats des différents contrôles qui ont été réalisés que pour le premier exemple considéré (§ 5.4), ce qui ne signifie nullement que de tels contrôles n'ont pas été effectués aussi pour les autres exemples.

le cas de données ordinales ou codées sous forme de rangs, et par les méthodes d'analyse des tableaux de contingence, dont le test χ^2 d'indépendance et le modèle log-linéaire [STAT2, § 6.2 et 6.3], dans le cas de données qualitatives. Elle cède aussi la place à la régression multiple [STAT2, § 16.2 et 16.3; DAGNELIE, 1986, chap. 4] lors de l'étude des surfaces de réponse, y compris les problèmes de mélanges (§ 2.4.1 et 2.4.2), et dans le cas des plans optimaux (§ 2.4.3).

En outre, des modèles plus complexes, tels que le modèle linéaire mixte et le modèle linéaire généralisé (§ 12.4.4), peuvent se substituer dans certaines circonstances aux modèles classiques d'analyse de la variance. Tel est le cas en particulier quand des observations sont effectuées successivement, à différents moments, sur les mêmes individus (mesures répétées dans le temps ou données longitudinales).

⊖ 3° Répétitions uniques ou partielles

Une difficulté peut apparaître pour les expériences qui ne sont l'objet que d'une seule répétition ou d'une répétition partielle. Il en est ainsi notamment pour les expériences factorielles fractionnaires et parfois pour les expériences factorielles complètes (§ 2.3.2.8° et 2.3.3).

En l'absence de répétitions, on ne dispose en effet d'aucune estimation de la variance résiduelle et, sans facteurs aléatoires, on ne peut alors procéder à aucun test de signification et à aucune détermination exacte de limites de confiance [STAT2, § 10.3.6, 11.2.4 et 11.4.2].

Une solution peut être toutefois d'utiliser comme estimation de la variance résiduelle soit le terme d'interaction d'ordre le plus élevé, soit un carré moyen provenant du regroupement de ce terme avec d'autres termes d'interaction [STAT2, ex. 11.4.1].

⊖ 4° Diagrammes de probabilité

Dans le cas des expériences factorielles de type 2^k , une autre solution consiste à effectuer une représentation graphique des effets principaux et des interactions sous la forme d'un *demi-diagramme de probabilité*⁹.

À cette fin, à partir des différentes moyennes observées, on procède tout d'abord à l'estimation des effets principaux a_i , b_j , ..., des interactions de deux facteurs $(ab)_{ij}$, $(ac)_{ik}$, ..., et des diverses interactions d'ordre supérieur $(abc)_{ijk}$, ...¹⁰. On construit ensuite, pour les valeurs absolues des estimations ainsi obtenues, un diagramme de probabilité limité aux valeurs positives de la variable normale réduite, c'est-à-dire à la moitié supérieure des diagrammes de probabilité classiques [STAT2, § 3.3.2]¹¹.

⁹ En anglais : *half-normal plot*.

¹⁰ Les notations utilisées sont celles qui concernent l'analyse de la variance à deux ou plus de deux critères de classification [STAT2, § 10.3.2 et 11.2.3].

¹¹ Les demi-diagrammes de probabilité dont il est question ici sont aussi ceux que nous présentons pour les racines carrées des distances de MAHALANOBIS, en matière de tests de normalité dans le cas des distributions à deux dimensions [STAT2, § 3.6.3].

L'examen des demi-diagrammes de probabilité permet notamment d'identifier les effets principaux et les termes d'interaction qui sont les plus importants.

Nous donnons plus de détails au sujet de la construction et de l'interprétation de ces diagrammes au paragraphe 5.5.3.

⊖ 5° Compléments

Les effets principaux et les termes d'interaction dont il vient d'être question sont en fait des contrastes orthogonaux [STAT2, § 12.2.1], et la procédure qui vient d'être esquissée est une recherche des contrastes ou des effets les plus *actifs*¹², cette dernière notion généralisant celle de facteurs influents, à laquelle nous avons fait allusion au paragraphe 1.2.2.4°.

Dans cette optique, différents tests, dont le *test* ou la *méthode de LENTH*¹³, ont été proposés en vue de compléter l'étude visuelle des demi-diagrammes de probabilité.

D'autres informations relatives aux différents sujets abordés ici peuvent être trouvées notamment dans les articles d'ABOUKALAM [2005], ANGELOPOULOS et KOUKOUVINOS [2008], EDWARDS et MEE [2008], et MILLER [2005].

5.3 Discussion

1° Avantages et inconvénients

Si le dispositif expérimental complètement aléatoire a l'avantage d'être à première vue très simple, il n'est cependant pas sans inconvénients. Il faut noter tout d'abord qu'il peut conduire à certaines anomalies, parfois importantes.

Ainsi, dans le premier exemple de la figure 5.1.1, on peut observer que, par le jeu de la répartition complètement aléatoire, l'objet 4 est largement concentré dans le coin supérieur droit du champ d'expérience (parcelles 3, 4 et 8), tandis que l'objet 1 est concentré, dans une moindre mesure cependant, dans la partie inférieure gauche du dispositif (parcelles 9, 13 et 18).

Un phénomène semblable, mais moins apparent au premier abord, se présente dans le deuxième exemple de la même figure, en ce qui concerne le premier facteur. Cinq répétitions sur six de la modalité 2 de ce facteur (objets 21, 22 et 23) sont en effet localisées dans la première moitié du dispositif (essais 1, 2, 3, 6 et 7), tandis que cinq répétitions sur six de la modalité 3 de ce facteur (objets 31, 32 et 33) se trouvent dans la deuxième moitié du dispositif (essais 10, 12, 13, 17 et 18).

De telles situations peuvent porter à conséquence quand le matériel expérimental, au sens large, est caractérisé par des variations non contrôlées importantes ou

¹² En anglais : *active contrast*, *active effect*.

¹³ En anglais : *LENTH's method*.

systématiques. Dans le deuxième cas par exemple, les conditions expérimentales pourraient évoluer de manière systématique dans le temps, en raison notamment d'une modification progressive des qualités de la matière première mise en œuvre (dégradation, humidification, etc.), d'une usure ou de toute autre évolution progressive de l'appareillage utilisé, d'une fatigue croissante ou au contraire d'une habileté de plus en plus grande des opérateurs, etc.

Ces évolutions progressives, dans le temps ou dans l'espace, sont souvent appelées *dérive* ou *gradient* ou *tendance systématique*¹⁴.

2° Entorses à la répartition « au hasard »

Face à de telles situations, les expérimentateurs peuvent être tentés d'éliminer purement et simplement les répartitions qui leur paraissent « anormales », en réalisant de nouvelles répartitions ou en « corrigeant » les premières répartitions obtenues, de manière à les rendre « plus satisfaisantes » (à leur point de vue !). De telles pratiques, qui peuvent être très subjectives, ne sont pas nécessairement répréhensibles, mais il est souvent difficile d'en mesurer l'impact, et il est donc préférable de s'en abstenir strictement.

Certains expérimentateurs s'efforcent également de remédier à l'hétérogénéité du matériel expérimental en constituant des ensembles d'unités expérimentales aussi « équilibrés » que possible. Il peut s'agir par exemple de groupes d'animaux auxquels doivent être affectés les différents objets, et qui sont constitués de telle sorte que les poids initiaux totaux ou moyens des différents groupes soient identiques ou très peu différents.

Comme l'indique notamment FINNEY [1957], cette façon de procéder est dangereuse, en particulier parce qu'elle conduit à une surestimation systématique de la variance résiduelle, et donc à une perte de puissance ou de précision des comparaisons qui sont faites. Une situation de ce type est présentée au paragraphe 11.5.2.4°.

Des solutions plus satisfaisantes peuvent être obtenues en faisant appel aux dispositifs expérimentaux qui sont présentés dans les chapitres suivants (dispositifs en blocs aléatoires complets, en blocs incomplets, etc.). La figure 6.1.1 illustre par exemple l'application du principe des blocs aléatoires complets à une situation semblable à celle du premier cas de la figure 5.1.1, chacun des objets se trouvant alors une et une seule fois dans chacun des blocs qui correspondent aux quatre colonnes de parcelles.

[La question de la randomisation complète est l'objet de nombreuses discussions, et diverses solutions de *randomisation restreinte* ou *sous contraintes*¹⁵ ont été proposées [BAILEY, 1985 ; COX, 2009 ; MAYO, 1987 ; NELSON, 1996].

On peut mentionner en outre que, par différentes méthodes d'ajustement et de stratification, et à l'aide de l'analyse de la covariance, des informations collectées

¹⁴ En anglais : *gradient*, *trend*.

¹⁵ En anglais : *restricted randomization*, *constrained randomization*.

par simple observation, sans randomisation, sont parfois assimilées à des résultats [d'expériences aléatoires [LI et YUE, 2008 ; RUBIN, 2006 ; SHADISH *et al.*, 2008].

3° Difficultés liées aux modifications des modalités

Un autre inconvénient de la randomisation complète, dans le cas des expériences organisées de manière séquentielle dans le temps, provient du fait que ce type d'expérience nécessite le plus souvent de nombreuses modifications des conditions expérimentales, alors que ces modifications peuvent exiger de longues manipulations ou être très coûteuses. En examinant attentivement la partie inférieure de la figure 5.1.1, on peut constater par exemple que les modalités du premier facteur doivent être modifiées à 10 reprises au cours de l'expérience (modalité 2 pour les trois premiers essais, puis modalité 1 pour deux essais, puis encore modalité 2 pour deux essais, etc.), tandis que les modalités du deuxième facteur doivent être modifiées à 14 reprises (successivement modalités 2, 3, 1, 3, 2, etc.).

Quand les modalités d'un ou de certains facteurs sont plus *difficiles à modifier*¹⁶ que les modalités du ou des autres facteurs, on peut être tenté de privilégier certaines répartitions par rapport à d'autres. Toujours pour le même exemple, si les modifications relatives au premier facteur étaient sensiblement plus délicates que les modifications relatives au deuxième facteur, on pourrait être tenté d'utiliser une solution du type :

33 31 32 13 12 11 32 31 33 21 22 23 11 13 12 21 22 23,

dans laquelle les trois modalités du deuxième facteur (deuxièmes chiffres 1, 2 et 3) sont chaque fois associés successivement à une même modalité du premier facteur (premiers chiffres 1, 2 et 3)¹⁷.

Une telle répartition est tout à fait acceptable, mais il faut savoir qu'elle correspond en réalité, non pas à une expérience complètement aléatoire, mais bien au cas des expériences dites en parcelles divisées, dont il est question au chapitre 7. Il s'impose donc d'en interpréter les résultats, le cas échéant, selon les principes relatifs à ce type d'expérience.

4° Expériences systématiques et insensibles aux dérives

Par souci de facilité, on peut enfin être tenté d'organiser des expériences de façon tout à fait *systématique*¹⁸, c'est-à-dire par exemple comme suit :

11 11 12 12 13 13 21 21 22 22 23 23 31 31 32 32 33 33,

¹⁶ En anglais : *hard-to-change factor*.

¹⁷ Cette solution a été établie en répartissant tout d'abord au hasard, et avec deux répétitions, les trois modalités du premier facteur, puis pour chacun des six cas, au hasard et indépendamment les trois modalités du deuxième facteur.

¹⁸ En anglais : *systematic design*.

ou encore :

11 11 21 21 31 31 12 12 22 22 32 32 13 13 23 23 33 33,

les modalités des deux facteurs étant modifiées de façon progressive, à tour de rôle, dans un cas comme dans l'autre.

Une telle façon de faire peut être extrêmement dangereuse en présence de dérives semblables à celles auxquelles nous avons fait allusion ci-dessus, et cela même si les dérives en question sont d'une amplitude très limitée [DAGNELIE, 2000]. Nous illustrerons ce point au paragraphe 5.4.3.

[Mais d'autres solutions, conduisant à l'obtention de plans qui sont *insensibles aux dérives*¹⁹, ont été proposées par différents auteurs, en faisant intervenir éventuellement aussi le coût des modifications des modalités [CORREA *et al.*, 2009; DE LEÓN ADAMS *et al.*, 2005; TACK et VANDEBROEK, 2004].

5° Recommandations

À défaut de conditions expérimentales qui sont *effectivement* tout à fait constantes et sauf recours à certaines solutions particulières telles que celles auxquelles nous avons fait allusion (expériences en parcelles divisées ou insensibles aux dérives notamment), nous ne pouvons que recommander de respecter *strictement* les principes de répartition au hasard.

Et ce type de répartition doit en fait intervenir à tous les niveaux du processus expérimental. Au cours d'une expérience portant par exemple sur des groupes d'animaux, il ne suffit pas de constituer les groupes au hasard au début de l'expérience. Il faut également répartir au hasard les groupes dans les stalles, les loges ou les cages d'élevage, et dans toute la mesure du possible, respecter la répartition au hasard dans la préparation et l'application des traitements (alimentations, injections, etc.), maintenir la répartition au hasard au moment où d'éventuels prélèvements (sanguins par exemple) sont effectués et lors des analyses de laboratoire, etc.

5.4 Exemple 1 : expérience complètement aléatoire à deux facteurs

5.4.1 Présentation et données

1° Présentation

Nous considérons, comme première illustration du dispositif complètement aléatoire, le cas d'une expérience relative à la carbonisation du bois de hêtre (*Fagus sylvatica* L.).

¹⁹ En anglais : *trend-free design*, *trend-robust design*.

Le but de l'expérience est d'étudier l'influence de la dimension et du degré d'humidité des fragments de bois soumis à la carbonisation sur le rendement en charbon de bois [SCHENKEL, 1999].

Le facteur dimension des fragments de bois présente trois niveaux, correspondant à des cubes de 2 cm, 4 cm et 8 cm de côté. Le facteur humidité a au contraire quatre niveaux, à savoir une humidité nulle (bois anhydre) et des humidités égales à (ou proches de) 10 %, 20 % et 40 % (en pourcentages de la masse du bois anhydre). L'expérience est une expérience factorielle complète et comporte donc 12 objets.

Les unités expérimentales sont dans chaque cas des ensembles de cubes de bois, et trois répétitions ont été prévues pour chacun des objets.

La carbonisation est effectuée dans un four chauffé à haute température et les observations que nous prenons en considération concernent le rendement en charbon de bois, exprimé en pourcentage de la masse du bois anhydre.

2° Données

Les résultats obtenus figurent dans le tableau 5.4.1 et, sous une autre forme, dans le tableau 5.4.2. Dans ce deuxième tableau, les colonnes D (dimensions des fragments de bois) pourraient tout aussi bien contenir un premier indice (i , variant de 1 à 3), les colonnes H (humidités des fragments de bois) pourraient contenir un deuxième indice (j , variant de 1 à 4), et les colonnes Rdt pourraient alors être intitulées x_{ijk} , l'indice k étant relatif aux répétitions.

Tableau 5.4.1. Étude de la carbonisation du bois de hêtre : rendements en charbon de bois, en pourcentages du bois anhydre (première présentation).

Dim. (cm)	Humidité (%)			
	0	10	20	40
2	30,00	29,82	29,27	33,11
	29,67	29,71	30,11	30,18
	29,78	29,87	30,58	29,16
4	29,38	29,11	29,98	29,31
	28,98	29,18	30,02	29,22
	29,82	30,22	29,49	29,93
8	29,11	28,93	28,67	29,13
	29,78	29,78	29,44	29,42
	29,11	28,84	30,33	29,73

La deuxième présentation, constituée de quatre colonnes (D, H, k et Rdt, ou i , j , k et x_{ijk}) et 36 lignes, est la plus couramment utilisée en vue du traitement des données par ordinateur.

Tableau 5.4.2. Étude de la carbonisation du bois de hêtre : rendements en charbon de bois, en pourcentages du bois anhydre (deuxième présentation).

D	H	k	Rdt	D	H	k	Rdt	D	H	k	Rdt
2	0	1	30,00	4	0	1	29,38	8	0	1	29,11
2	0	2	29,67	4	0	2	28,98	8	0	2	29,78
2	0	3	29,78	4	0	3	29,82	8	0	3	29,11
2	10	1	29,82	4	10	1	29,11	8	10	1	28,93
2	10	2	29,71	4	10	2	29,18	8	10	2	29,78
2	10	3	29,87	4	10	3	30,22	8	10	3	28,84
2	20	1	29,27	4	20	1	29,98	8	20	1	28,67
2	20	2	30,11	4	20	2	30,02	8	20	2	29,44
2	20	3	30,58	4	20	3	29,49	8	20	3	30,33
2	40	1	33,11	4	40	1	29,31	8	40	1	29,13
2	40	2	30,18	4	40	2	29,22	8	40	2	29,42
2	40	3	29,16	4	40	3	29,93	8	40	3	29,73

5.4.2 Analyse des résultats²⁰

1° Examen préliminaire

Une représentation graphique des données sous la forme de diagrammes de dispersion offre une première vue d'ensemble des résultats (figure 5.4.1).

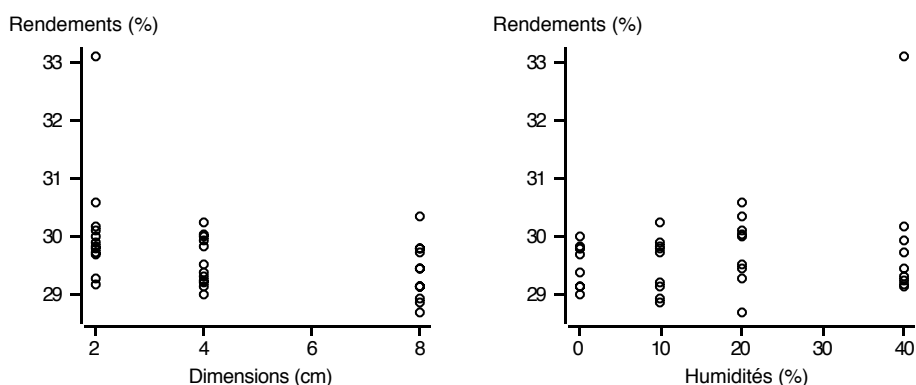


Figure 5.4.1. Étude de la carbonisation du bois de hêtre : représentation graphique de l'influence des deux facteurs considérés²¹.

²⁰ Un traitement complet de cet exemple à l'aide du logiciel R est présenté à l'adresse <www.dagnelie.be/docexr/exp054/exp054.htm>.

²¹ Dans ce type de graphique, on ne fait souvent figurer que les points moyens relatifs aux différentes modalités des facteurs. Nous pensons qu'il est de loin préférable de représenter autant que possible les valeurs individuelles elles-mêmes, de manière à pouvoir visualiser, non seulement l'influence des facteurs en termes de moyennes, mais aussi la variabilité des observations.

On constate ainsi, d'une part, l'existence d'une valeur apparemment fort anormale (33,11), et d'autre part, le fait que les deux facteurs ne semblent guère avoir d'influence sur le rendement en charbon de bois, dans le domaine considéré.

La question qui se pose est de savoir si la valeur 33,11 doit être corrigée car, en retournant aux documents originaux, on pourrait identifier par exemple une erreur de transcription (peut-être 33,11 à la place de 30,11 ?), si cette valeur doit au contraire être considérée comme acceptable, ou si elle doit être écartée de l'analyse. En l'absence de toute information complémentaire à ce sujet, nous avons choisi de tester le caractère aberrant de cette observation par la méthode de GRUBBS [STAT2, § 3.5.3] et de l'éliminer éventuellement.

À cette fin, il est nécessaire de procéder à l'analyse de la variance de l'ensemble des données, y compris la valeur suspecte, et de calculer les résidus réduits de cette analyse, c'est-à-dire les résidus de l'analyse divisés par leur écart-type. Le modèle d'analyse de la variance est ici un modèle croisé fixe à deux critères de classification (dimension et humidité), avec des effectifs constants ($n = 3$) [STAT2, § 10.3.2].

Le résidu réduit qui correspond à la valeur 33,11 est égal à 3,07, alors qu'avec 24 degrés de liberté, la valeur maximum admissible est approximativement égale à 2,88, au niveau de probabilité 0,05 [STAT2, table VI]. La valeur suspecte peut donc être considérée comme effectivement anormale, et ne sera plus prise en compte dans la suite.

La moyenne générale des observations est alors égale à 29,58 %, avec des valeurs extrêmes égales à 28,67 et 30,58 %.

La figure 5.4.2 présente les mêmes résultats que la figure 5.4.1, mais après élimination de la valeur 33,11. La partie gauche de cette figure suggère l'existence possible d'une légère décroissance du rendement en fonction de l'augmentation de la dimension des fragments de bois.

2° Analyse de la variance

Si on souhaite conserver le caractère orthogonal de l'analyse de la variance, ce qui en facilite le calcul et l'interprétation, on doit estimer la valeur qui est considérée comme manquante, par la moyenne des autres observations relatives au même objet. On doit aussi diminuer en conséquence d'une unité le nombre de degrés de liberté de la composante résiduelle [STAT2, § 10.4.2].

On obtient ainsi la valeur estimée :

$$(30,18 + 29,16)/2 = 29,67,$$

et ensuite le tableau d'analyse de la variance (tableau 5.4.3).

3° Conditions d'application

Avant d'aborder l'interprétation des résultats de l'analyse de la variance, il faut en vérifier la validité des conditions d'application.

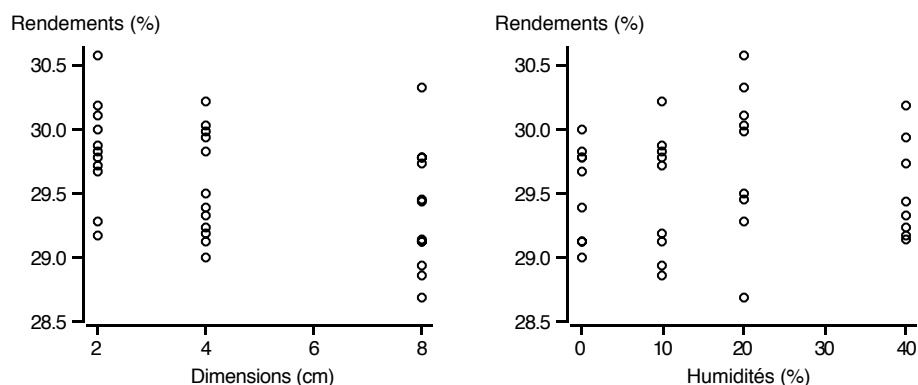


Figure 5.4.2. Étude de la carbonisation du bois de hêtre : représentation graphique de l'influence des deux facteurs, après élimination d'une observation considérée comme aberrante.

Tableau 5.4.3. Étude de la carbonisation du bois de hêtre : tableau d'analyse de la variance.

Sources de variation	Degrés de liberté	Sommes des carrés des écarts	Carrés moyens	F	P
Dimension	2	1,2926	0,6463	2,72	0,087
Humidité	3	0,4367	0,1456	0,61	0,61
Dimension-humidité	6	0,1947	0,0325	0,14	0,99
Variation résiduelle	23	5,4675	0,2377		
Totaux	34	7,3915			

La présentation des résidus sous la forme de « *boxplot* » et de diagramme de probabilité (figure 5.4.3), ou uniquement sous cette deuxième forme, ne met en évidence aucune anomalie importante quant aux valeurs individuelles et quant à la normalité de la distribution des résidus.

D'autre part, la méthode de LEVENE, qui consiste en une analyse de la variance du même type que ci-dessus, portant sur les valeurs absolues des résidus [STAT2, § 7.5.2], conduit aussi à une conclusion tout à fait satisfaisante en matière d'égalité des variances. Cette méthode donne en effet, pour les deux facteurs principaux et pour l'interaction, des valeurs des variables F de FISHER-SNEDECOR égales à 0,78, 1,11 et 1,54, et des probabilités correspondantes égales à 0,47, 0,37 et 0,21.

4° Interprétation

À première vue, l'analyse de la variance des données initiales ne fait apparaître aucune différence significative, dans les limites du domaine considéré, ce qui irait à l'encontre de l'impression donnée par la figure 5.4.2.

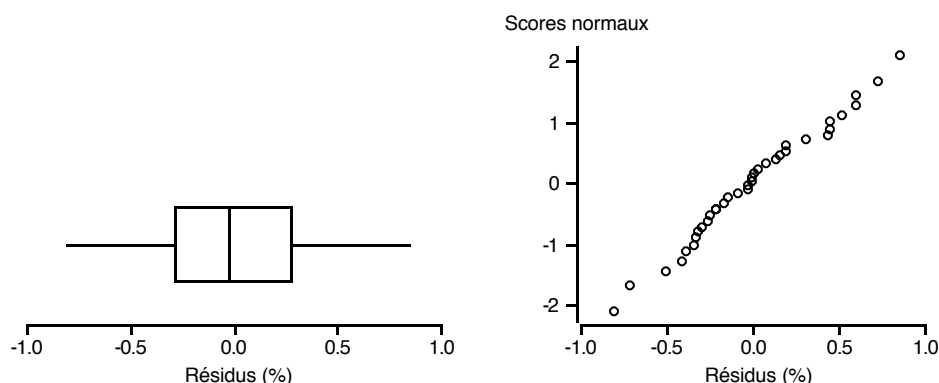


Figure 5.4.3. Étude de la carbonisation du bois de hêtre : représentation graphique des résidus de l'analyse de la variance sous la forme de « *boxplot* » et de diagramme de probabilité.

Si toutefois, on s'était fixé au départ comme objectif d'établir autant que possible des relations linéaires ou quadratiques entre les deux facteurs considérés et le rendement, on devrait constater qu'il existe bien une relation significative entre la dimension des fragments de bois et le rendement. La somme des carrés des écarts relative à la relation linéaire entre ces deux variables est en effet égale à 1,1978, ce qui donne, par comparaison avec le carré moyen résiduel de l'analyse de la variance, une valeur de la variable F égale à 5,04 et une probabilité égale à 0,035 [STAT2, § 14.5.3].

La valeur 1,1978 pourrait d'ailleurs être introduite dans le tableau d'analyse de la variance (tableau 5.4.3) comme étant la partie linéaire de l'effet du facteur dimension, la différence, égale à 0,0948, étant la partie quadratique de l'effet de ce même facteur [STAT2, § 12.2.3].

L'équation de régression linéaire, qui est valable uniquement pour des dimensions allant de 2 à 8 cm, est :

$$\text{Rdt} = 29,917 - 0,0731 D,$$

si on utilise les notations du tableau 5.4.2.

La divergence qui apparaît entre les conclusions de la seule approche « analyse de la variance » (absence de différences significatives) et de l'approche « régression » (régression linéaire significative) met bien en évidence la nécessité de définir de façon précise, au départ, le ou les objectifs prioritaires de l'expérience et la procédure d'analyse des résultats qui devra être suivie²².

²² Des conclusions finales fort semblables peuvent être déduites de l'ensemble des données, sans élimination de la valeur 33,11. Toutefois, la méthode de LEVENE met alors en évidence des inégalités de variances, et le résidu de la régression linéaire relatif à la valeur 33,11 est dans ces conditions tout à fait anormal.

5.4.3 Importance de la randomisation

1° Principe

Tout ce qui a été dit jusqu'à présent suppose que l'expérience a été réalisée de manière complètement aléatoire, c'est-à-dire notamment que, si les 36 essais dont les résultats sont donnés dans les tableaux 5.4.1 et 5.4.2 ont été effectués successivement dans un même four, ils l'ont été dans un ordre déterminé tout à fait « au hasard ». On peut se poser la question de savoir ce qu'il en serait si les différents essais avaient été réalisés, au contraire, dans un ordre systématique, correspondant par exemple à l'ordre de présentation des résultats dans le tableau 5.4.2.

Dans des conditions strictement constantes, l'ordre de réalisation des essais n'en influence pas les résultats, mais il n'en est pas de même quand les conditions expérimentales varient.

À titre d'illustration, nous supposons ici que certaines conditions de l'expérience ont évolué dans le temps de manière progressive, en induisant une tendance générale dans les résultats, sous la forme d'une dérive linéaire. On peut considérer par exemple une dérive négative ou positive égale à 0,005 ou 0,01 entre les différents essais successifs. Une dérive positive égale à 0,01, qui s'ajouterait d'essai en essai, c'est-à-dire de ligne en ligne, aux données du tableau 5.4.2, impliquerait que la deuxième observation de ce tableau ne serait plus 29,67, mais bien 29,68, que la troisième observation du même tableau ne serait pas 29,78, mais 29,80, que la quatrième observation ne serait pas 29,82, mais 29,85, etc.

Le tableau 5.4.4 présente partiellement les données réelles (colonne 0,00) et les données qui auraient été obtenues en présence des dérives linéaires négatives et positives que nous envisageons ($-0,01$, $-0,005$, $+0,005$ et $+0,01$). On notera que les dérives totales, de la première à la dernière observation, sont égales en valeur absolue à 0,175 et 0,35, et sont donc seulement de l'ordre de 0,6 et 1,2 % de la moyenne générale, égale à 29,58.

2° Résultats

Les résultats de l'analyse de la variance relative aux données de la colonne 0,00 du tableau 5.4.4 (absence de dérive) sont ceux du tableau 5.4.3, mais des résultats différents doivent être attendus en appliquant exactement la même procédure aux quatre autres colonnes du tableau 5.4.4.

Le tableau 5.4.5 présente les principaux résultats des cinq analyses de la variance, à savoir les carrés moyens résiduels (CM_r), les carrés moyens relatifs à l'interaction dimension-humidité (CM_{ab}), les carrés moyens relatifs au facteur humidité (CM_b), ainsi que les carrés moyens, les valeurs des variables de FISHER-SNEDECOR et les probabilités qui concernent le facteur dimension des fragments de bois (CM_a , F_a et P)²³.

²³ Les notations sont celles que nous utilisons habituellement pour l'analyse de la variance à deux critères de classification [STAT2, § 10.3.2].

Tableau 5.4.4. Étude de la carbonisation du bois de hêtre : présentation partielle des données réelles (colonne 0,00) et des données modifiées par diverses dérives linéaires (colonnes $-0,01$, $-0,005$, $+0,005$ et $+0,01$).

D	H	k	$-0,01$	$-0,005$	$0,00$	$+0,005$	$+0,01$
2	0	1	30,00	30,000	30,00	30,000	30,00
2	0	2	29,66	29,665	29,67	29,675	29,68
2	0	3	29,76	29,770	29,78	29,790	29,80
2	10	1	29,79	29,805	29,82	29,835	29,85
2	10	2	29,67	29,690	29,71	29,730	29,75
2	10	3	29,82	29,845	29,87	29,895	29,92
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
8	40	1	28,80	28,965	29,13	29,295	29,46
8	40	2	29,08	29,250	29,42	29,590	29,76
8	40	3	29,38	29,555	29,73	29,905	30,08

Tableau 5.4.5. Étude de la carbonisation du bois de hêtre : principaux résultats des analyses de la variance relatives aux données réelles (ligne 0,00) et aux données modifiées par diverses dérives linéaires²⁴.

Dérives	CM_r	CM_{ab}	CM_b	CM_a	F_a	P
$-0,01$	0,2339	0,0331	0,1324	1,4778	6,32	0,0065**
$-0,005$	0,2358	0,0327	0,1353	1,0204	4,33	0,025*
$0,00$	0,2377	0,0325	0,1456	0,6463	2,72	0,087
$+0,005$	0,2397	0,0322	0,1628	0,3578	1,49	0,25
$+0,01$	0,2417	0,0318	0,1869	0,1555	0,64	0,53

Les différences observées entre les résultats des cinq analyses de la variance sont tout à fait négligeables pour la variation résiduelle et pour l'interaction des deux facteurs²⁵. Ces différences sont peu importantes aussi pour le facteur humidité. C'est ce qui justifie le fait que nous ne considérons à ce propos que les carrés moyens, en négligeant les valeurs des variables de FISHER-SNEDECOR et les probabilités qui leur sont associées.

²⁴ De manière à laisser à chacun la possibilité de se référer à l'une ou à l'autre forme de présentation, nous faisons figurer ici, comme dans la plupart des tableaux d'analyse de la variance, à la fois les probabilités P (*p-values*) associées aux valeurs des variables de FISHER-SNEDECOR et les astérisques caractéristiques des trois niveaux de signification habituels (0,05, 0,01 et 0,001), même si ces mentions sont dans une certaine mesure redondantes [STAT2, ex. 10.3.3].

²⁵ En principe, l'interaction des deux facteurs ne devrait pas être influencée du tout par les dérives linéaires, mais des différences minimales apparaissent cependant dans le cas présent, du fait de l'estimation d'une donnée considérée comme manquante.

Par contre, des différences considérables apparaissent en ce qui concerne le facteur dimension des fragments de bois, les carrés moyens et les valeurs F variant dans un rapport de 1 à 10. On peut constater aussi que ce facteur qui, initialement, n'était pas significatif mais néanmoins proche de la limite 0,05 (tableau 5.4.3 : $P = 0,087$), est tout à fait non significatif dans le cas des dérivées positives ($P = 0,25$ et $0,53$), et est au contraire significatif ou hautement significatif dans le cas des dérivées négatives ($P = 0,025$ et $0,0065$).

Une évolution tout à fait comparable peut être mise en évidence en ce qui concerne la régression, les probabilités relatives à la composante linéaire du facteur dimension allant de 0,0022 pour une dérivée égale à $-0,01$, à 0,30 pour une dérivée égale à $+0,01$, au lieu de 0,035 en l'absence de dérivée.

Tant en analyse de la variance qu'en régression, les résultats sont donc fondamentalement modifiés du fait des dérivées que nous avons envisagées.

Cet exemple, comme d'autres [DAGNELIE, 2000], illustre l'importance qu'il faut accorder à la randomisation dans la planification et la réalisation des expériences, et les risques d'erreur potentiellement considérables qui sont inhérents à toute absence de randomisation, même dans le cas de dérivées de relativement faible importance (dérivée totale de l'ordre de 1 % de la moyenne seulement, dans l'exemple considéré ici).

5.5 Exemple 2: expérience complètement aléatoire à quatre facteurs

⊖ 5.5.1 Présentation et données

1° Présentation

Nous envisageons, comme deuxième exemple d'expérience complètement aléatoire, un problème qui peut être abordé sous différents angles. Il s'agit d'une expérience destinée à étudier les conditions de production de lipase par une souche de la levure *Yarrowia lipolytica*, dans un milieu de culture de type lactosérum [UWAMWEZI, 1996].

Quatre facteurs sont pris en considération selon un ensemble factoriel complet 2^4 (§ 2.3.2). En outre, un point expérimental supplémentaire a été prévu, avec quatre répétitions, au centre de l'hypercube formé par les points factoriels, comme nous l'avons indiqué au paragraphe 2.3.2.8°.

Au total, l'expérience comporte donc 17 objets et 20 unités expérimentales, ces unités étant des fioles de culture. Les 17 objets ont été affectés de manière complètement aléatoire aux 20 fioles, et deux mesures d'activité enzymatique ont été réalisées pour chacune de celles-ci.

Le tableau 5.5.1 présente les facteurs étudiés et leurs différents niveaux. Il comprend également les lettres A, B, C et D, que nous utiliserons dans la suite pour désigner les quatre facteurs.

Tableau 5.5.1. Étude des conditions de production d'une enzyme : facteurs pris en considération et niveaux de ces facteurs²⁶.

Facteurs	Symboles	Niveaux (%)		
		-1	0	+1
Glucose	A	0,25	0,5	1
Lactosérum	B	1	2	3
Sulfate ammonique	C	0	0,4	0,8
<i>Corn-steep</i>	D	0,25	0,5	1

2° Données

Le tableau 5.5.2 présente les 17 objets et les résultats obtenus pour les 20 fioles, en unités par millilitre (U/ml), une unité correspondant à la quantité d'enzyme susceptible de libérer une micromôle d'acide gras par minute. Nous avons ajouté à ces données les codes alphabétiques relatifs aux 16 points expérimentaux factoriels, selon les notations introduites au paragraphe 2.3.2.6°.

⊖ 5.5.2 Interprétation des résultats : analyse de la variance

1° Examen préliminaire

Le premier élément qui apparaît, à la vue du tableau 5.5.2, est la très grande dispersion des 40 observations individuelles, qui s'étendent de 0 à 1.243 U/ml. Leur moyenne générale est égale à 490 U/ml et leur écart-type estimé à 375 U/ml. Cette dernière valeur ne présente cependant guère d'intérêt, car elle englobe à la fois l'influence des différents facteurs et de leurs interactions éventuelles et les fluctuations résiduelles.

Par une analyse de la variance à un critère de classification, qui tient compte des différences entre les 20 unités expérimentales (20 fioles), indépendamment des objets qui leur sont affectés, et qui constitue les trois dernières lignes du tableau 5.5.3, on obtient un carré moyen résiduel égal à 9.897. L'écart-type qui caractérise les différences entre mesures est donc égal à 99,5 U/ml, et le coefficient de variation entre mesures est égal à 20,3 %.

La figure 5.5.1 présente également les valeurs observées en fonction des niveaux des différents facteurs. Les quatre diagrammes de cette figure, qui ne tiennent

²⁶ L'utilisation des valeurs conventionnelles -1, 0 et +1 implique que les facteurs A et D sont considérés selon des échelles logarithmiques, les valeurs 0,5 se trouvant à mi-chemin entre 0,25 et 1 en termes de logarithmes.

Tableau 5.5.2. Étude des conditions de production d'une enzyme : niveaux des facteurs, symboles des points factoriels, valeurs observées et moyennes de ces valeurs, en unités par millilitre (U/ml)²⁷.

A	B	C	D	Symb.	Valeurs obs.		Moy.
-1	-1	-1	-1	(1)	77	0	38,5
-1	-1	-1	+1	d	61	15	38,0
-1	-1	+1	-1	c	144	24	84,0
-1	-1	+1	+1	cd	442	634	538,0
-1	+1	-1	-1	b	252	279	265,5
-1	+1	-1	+1	bd	53	24	38,5
-1	+1	+1	-1	bc	482	633	557,5
-1	+1	+1	+1	bcd	1.028	936	982,0
+1	-1	-1	-1	a	54	0	27,0
+1	-1	-1	+1	ad	601	745	673,0
+1	-1	+1	-1	ac	102	44	73,0
+1	-1	+1	+1	acd	156	101	128,5
+1	+1	-1	-1	ab	750	680	715,0
+1	+1	-1	+1	abd	1.243	1.077	1.160,0
+1	+1	+1	-1	abc	682	831	756,5
+1	+1	+1	+1	abcd	883	1.184	1.033,5
0	0	0	0	–	837	658	747,5
0	0	0	0	–	590	546	568,0
0	0	0	0	–	839	538	688,5
0	0	0	0	–	717	655	686,0

aucun compte des éventuelles interactions, semblent indiquer que les facteurs A (glucose), B (lactosérum) et D (*corn-steep*) pourraient avoir chacun une influence significative.

2° Analyse de la variance

L'étude des différents facteurs et de leurs interactions peut être abordée par l'analyse de la variance. Mais, face à la grande variabilité des observations, il y a lieu de se poser au préalable la question de savoir s'il n'est pas opportun d'effectuer l'une ou l'autre transformation de variable.

Un examen attentif des données, selon les principes qui s'appliquent en la matière [STAT2, § 4.4], montre qu'aucune des transformations habituelles (logarithme, racine carrée, etc.) ne semble devoir être appliquée. L'analyse de la variance a en conséquence été réalisée sur les données initiales, et les résultats en sont présentés dans le tableau 5.5.3.

²⁷ Dans ce type de présentation, les valeurs -1 et +1 sont parfois désignées simplement par les signes - et +.

Tableau 5.5.3. Étude des conditions de production d'une enzyme :
tableau d'analyse de la variance.

Sources de var.	Degrés de lib.	S. des carrés des écarts	Carrés moyens	F	P	F_{23}	P_{23}
A	1	512.325	512.325	45,2 **	0,0067	50,8 ***	0,0000
B	1	1.909.546	1.909.546	169 ***	0,0010	189 ***	0,0000
C	1	179.251	179.251	15,8 *	0,028	17,8 ***	0,0003
D	1	537.944	537.944	47,5 **	0,0063	53,4 ***	0,0000
AB	1	327.443	327.443	28,9 *	0,013	32,5 ***	0,0000
AC	1	698.857	698.857	61,7 **	0,0043	69,3 ***	0,0000
AD	1	74.594	74.594	6,59	0,083	7,40 *	0,012
BC	1	152.214	152.214	13,4 *	0,035	15,1 ***	0,0007
BD	1	6.933	6.933	0,61	0,49	0,69	0,42
CD	1	15.095	15.095	1,33	0,33	1,50	0,23
ABC	1	9.557	9.557	0,84	0,43	0,95	0,34
ABD	1	9.557	9.557	0,84	0,43	0,95	0,34
ACD	1	434.545	434.545	38,4 **	0,0085	43,1 ***	0,0000
BCD	1	47.972	47.972	4,24	0,13	4,76 *	0,040
ABCD	1	6.356	6.356	0,56	0,51	0,63	0,44
Non-lin.	1	333.336	333.336	29,4 *	0,012	33,1 ***	0,0000
Var. rés.	3	33.967	11.322	1,14	0,36		
Fioles	19	5.289.492					
Mesures	20	197.933	9.897				
Totaux	39	5.487.425					

La partie supérieure de ce tableau identifie les 15 composantes (facteurs et interactions) relatives aux 16 points expérimentaux factoriels. Comme nous l'avons déjà dit, la partie inférieure sépare les différences entre les 20 unités expérimentales, indépendamment des objets qui leur sont affectés, et les différences entre les couples de mesures. La ligne « Var. rés. » concerne la variance résiduelle déduite des quatre répétitions du point central. Et la ligne « Non-lin. » compare la partie factorielle et la partie centrale du plan d'expérience, et constitue la composante de non-linéarité dont nous avons parlé au paragraphe 2.4.1.2°²⁸.

Le test de signification de la variance résiduelle (au point central) doit être réalisé par rapport aux différences entre mesures, tandis que les tests relatifs à la non-linéarité et aux 15 composantes factorielles doivent être effectués par rapport

²⁸ Les sommes des carrés des écarts de la partie supérieure du tableau 5.5.3 peuvent être obtenues notamment par une analyse de la variance à quatre critères de classification, la partie inférieure de ce tableau par une analyse de la variance à un critère de classification, la ligne « Var. rés. » par un simple calcul de variance, et la ligne « Non-lin. » par différence.

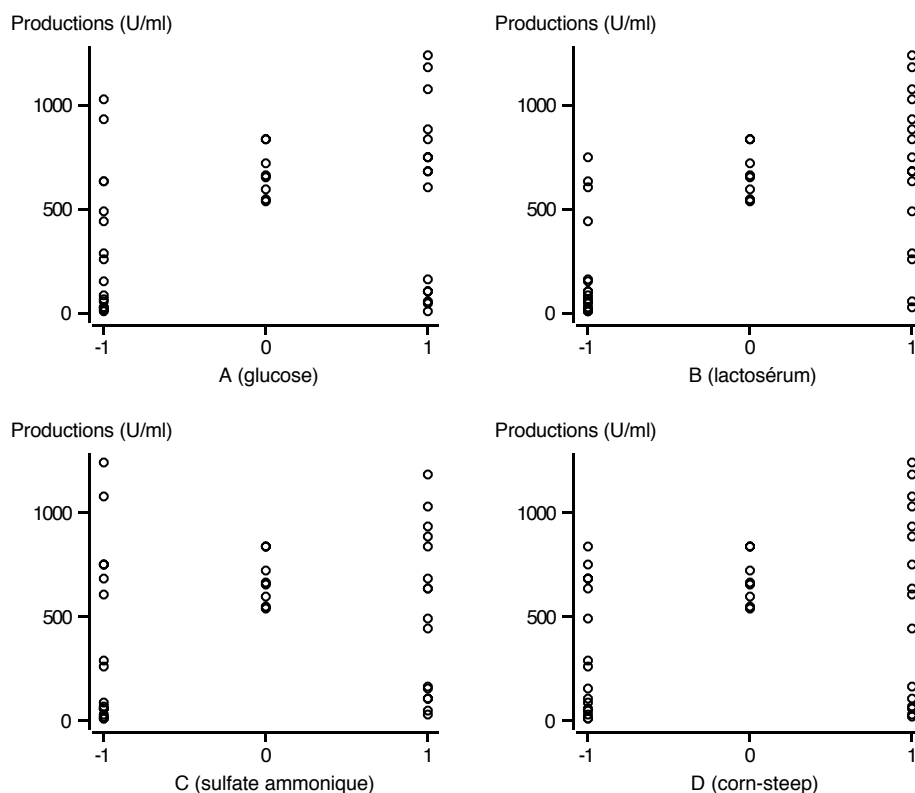


Figure 5.5.1. Étude des conditions de production d'une enzyme : représentation graphique de l'influence des différents facteurs.

à la variation résiduelle. Les résultats de ces tests sont donnés dans les colonnes F et P du tableau 5.5.3²⁹.

3° Interprétation

L'interprétation des résultats de l'analyse de variance est rendue difficile par la présence d'une interaction importante de trois facteurs (interaction ACD). Cette

²⁹ Certains livres et certains logiciels spécialisés présentent globalement l'influence de l'ensemble des facteurs étudiés, l'influence de l'ensemble des interactions de deux facteurs, l'influence de l'ensemble des interactions de trois facteurs, etc. Il nous paraît préférable d'identifier dans toute la mesure du possible l'influence de chacun des facteurs et de chacune des interactions. De même, une confusion peut résulter du fait que certains livres et certains logiciels appellent « erreur pure » ce que nous appelons « variation résiduelle », et « variation résiduelle » l'ensemble de cette « erreur pure » et de la composante de non-linéarité (dans le cas présent, une somme des carrés des écarts égale à 367.303 et un carré moyen égal à 91.826, avec quatre degrés de liberté), les tests de signification étant parfois réalisés par rapport à cette « pseudo-variation résiduelle ».

interaction, à laquelle il n'est pas possible de donner une explication simple, met en cause la validité des tests relatifs aux trois facteurs qui y interviennent.

Par contre, l'influence du facteur B (lactosérum) semble bien marquée, malgré la présence de deux interactions quelque peu significatives (interactions AB et BC). Les moyennes observées pour les niveaux -1 et $+1$ de ce facteur sont respectivement égales à 200 et à 689 U/ml, avec donc une différence égale à 489 U/ml, et la moyenne intermédiaire relative au niveau 0 est égale à 672 U/ml.

On peut remarquer en outre que la composante de non-linéarité est, elle également, significative. Ce fait est certainement lié en partie à la non-linéarité de l'influence du facteur B (valeur intermédiaire égale à 672, qui est loin de se situer à mi-chemin entre les valeurs extrêmes 200 et 689).

4° Conséquences d'éventuelles erreurs

En présence d'interactions significatives d'ordre supérieur, il y a toujours lieu de se demander si la situation observée n'est pas la conséquence d'erreurs d'identification des unités expérimentales (permutation d'étiquettes par exemple), d'erreurs d'attribution des objets aux unités expérimentales, d'erreurs de mesure, d'erreurs d'enregistrement ou de transcription des résultats, etc. Indépendamment de l'attention soutenue qui doit caractériser toute expérimentation, des contrôles supplémentaires réalisés a posteriori s'imposent donc toujours dans de tels cas.

On peut éventuellement se rendre compte de l'ampleur des conséquences de telles erreurs en permutant, à titre d'exercice, les observations de deux lignes voisines, mais fort différentes, du tableau 5.5.2 (par exemple les couples d'observations « 144-24 » et « 442-634 », ou « 252-279 » et « 53-24 »), et en recommençant l'analyse de la variance sur les données ainsi modifiées. De semblables permutations correspondent en effet aux erreurs qu'on commettrait en confondant deux objets qui ne diffèrent que par le niveau du seul facteur D (erreur d'étiquetage ou de transcription par exemple, en ce qui concerne les objets c et cd, ou b et bd).

5° Regroupement de deux sources de variation

Comme la variance résiduelle n'est pas significativement supérieure aux différences entre mesures, et comme les deux carrés moyens correspondants sont du même ordre de grandeur (11.322 et 9.897), on peut envisager aussi de regrouper ces carrés moyens de manière à définir une nouvelle composante résiduelle, avec 23 degrés de liberté :

$$(33.967 + 197.933)/(3 + 20) = 10.083.$$

Les résultats des tests réalisés en fonction de cette composante sont donnés dans les colonnes F_{23} et P_{23} du tableau 5.5.3.

Cette façon de procéder rend les tests sensiblement plus puissants, en raison de la présence de 23 degrés de liberté, au lieu de 3, au dénominateur des variables de FISHER-SNEDECOR. Dans le cas présent, cette procédure ne fait cependant que compliquer encore l'interprétation des résultats.

⊖ 5.5.3 Interprétation des résultats : demi-diagramme de probabilité

1° Effets des facteurs et des interactions

Une autre approche de l'analyse des mêmes données est basée sur la construction d'un demi-diagramme de probabilité, pour les effets des facteurs et des interactions (§ 5.2.4°). Le tableau 5.5.4 contient les valeurs de ces effets.

Tableau 5.5.4. Étude des conditions de production d'une enzyme : effets des facteurs et des interactions (U/ml).

Facteurs et interactions	Effets
A	127
B	244
C	75
D	130
AB	101
AC	-148
AD	48
BC	69
BD	-15
CD	22
ABC	17
ABD	-17
ACD	-117
BCD	39
ABCD	14

Ces valeurs peuvent être obtenues notamment à partir des moyennes relatives aux différents facteurs. On a par exemple, en utilisant des notations semblables à celles de l'analyse de la variance [STAT2, § 9.2.2, 10.2.2 et 11.2.2] :

$$\bar{x}_{2...} - \bar{x}_{...} = 570,81 - 444,28 = 126,53,$$

$$\bar{x}_{.2..} - \bar{x}_{...} = 688,56 - 444,28 = 244,28, \quad \dots,$$

$$\bar{x}_{22..} - \bar{x}_{2...} - \bar{x}_{.2..} + \bar{x}_{...} = 916,25 - 570,81 - 688,56 + 444,28 = 101,16, \quad \dots,$$

l'indice 2 désignant chaque fois le niveau supérieur +1 du facteur considéré³⁰.

³⁰ Les moyennes sont affectées de quatre indices, remplacés par des points en cas de sommation, qui correspondent aux quatre facteurs (A, B, C et D) : $\bar{x}_{2...}$ est la moyenne des observations relatives au niveau supérieur +1 du facteur A, $\bar{x}_{.2..}$ est la moyenne des observations relatives

Les valeurs présentées dans le tableau 5.5.4 peuvent également être obtenues par la méthode de YATES, relative aux expériences factorielles [STAT2, § 11.2.2 et ex. 11.2.2], ou par régression multiple, comme nous le verrons au paragraphe 5.5.4. Et les valeurs absolues correspondantes, qui interviennent dans la construction du diagramme de probabilité, sont à une constante près les racines carrées des sommes des carrés des écarts et des carrés moyens de l'analyse de la variance (tableau 5.5.3).

2° Demi-diagramme de probabilité

Le demi-diagramme de probabilité relatif aux données du tableau 5.5.4 est l'objet de la figure 5.5.2.

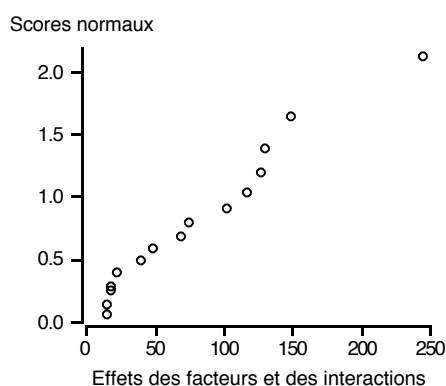


Figure 5.5.2. Étude des conditions de production d'une enzyme : demi-diagramme de probabilité relatif aux effets des facteurs et des interactions.

Classiquement, dans la construction d'un diagramme de probabilité, on porte en regard des différentes valeurs observées, les probabilités cumulées correspondantes ou les scores normaux, c'est-à-dire les valeurs équivalentes de la variable normale réduite [STAT2, § 3.3.2]. Ces dernières valeurs peuvent être déterminées par la relation :

$$u_i = \Phi^{-1}[(i - 1/2)/n],$$

au niveau supérieur +1 du facteur B, $\bar{x}_{22..}$ est la moyenne des observations relatives à la fois au niveau supérieur +1 du facteur A et au niveau supérieur +1 du facteur B, etc. Nous aurions pu ajouter un cinquième indice, relatif aux répétitions des mesures, mais nous avons évité de le faire, afin de ne pas surcharger les notations.

De plus, nous considérons ainsi que les « effets des facteurs et des interactions » sont les valeurs estimées des termes a_i , b_j , ..., $(ab)_{ij}$, $(ac)_{ik}$, ..., $(abc)_{ijk}$, ... de l'analyse de la variance [STAT2, § 9.3.2, 10.3.2 et 11.2.3]. Les « effets » sont parfois définis aussi comme étant les valeurs, deux fois plus élevées, qui correspondent, pour les différents facteurs, aux différences entre le niveau supérieur et le niveau inférieur, et non pas aux différences entre le niveau supérieur et le niveau moyen.

n étant le nombre d'observations qui doivent figurer dans le diagramme, i les rangs des observations, et Φ^{-1} la fonction inverse de la fonction de répartition $\Phi(u)$ de la distribution normale réduite [STAT1, § 6.6.1].

Dans le cas présent, on prend en considération les valeurs absolues des effets des facteurs et des interactions, car les signes affectés à ces effets dépendent uniquement de la manière dont a été réalisé le codage des facteurs en -1 et $+1$. On ne doit donc considérer que la moitié supérieure du diagramme de probabilité et, en conséquence, les scores normaux sont définis de la manière suivante :

$$u_i = \Phi^{-1}[1/2 + (i - 1/2)/(2n)].$$

Pour les deux valeurs extrêmes 14 et 244 du tableau 5.5.4, on a par exemple, respectivement :

$$u_1 = \Phi^{-1}[1/2 + (1 - 1/2)/30] = 0,042 \quad \text{et} \quad u_{15} = \Phi^{-1}[1/2 + (15 - 1/2)/30] = 2,128.$$

3° Interprétation

L'examen de la figure 5.5.2 montre que le demi-diagramme de probabilité est loin d'être linéaire, dans la mesure où il présente notamment une courbure à proximité de l'origine.

Néanmoins, il met en évidence un point qui se détache nettement de l'ensemble des autres, ce point correspondant à l'effet du facteur B (244 U/ml). Cette observation confirme dans une certaine mesure les résultats de l'analyse de la variance, le facteur B étant de loin le plus significatif (§ 5.5.2).

L'examen purement visuel du demi-diagramme de probabilité peut éventuellement être complété par la réalisation d'un des tests auxquels nous avons fait allusion au paragraphe 5.2.5°.

4° Commentaires

On notera que les effets des facteurs et des interactions qui sont présentés dans le tableau 5.5.4, ainsi que les conclusions qu'on peut en déduire, sont indépendants du fait qu'on tient compte uniquement des résultats relatifs aux 16 points expérimentaux factoriels ou de l'ensemble des 20 unités expérimentales. Ils sont indépendants aussi du fait qu'on considère les 32 ou les 40 valeurs observées individuelles ou, au contraire, les 16 ou les 20 moyennes (tableau 5.5.2).

Ces remarques sont importantes, car elles soulignent le fait que l'interprétation des résultats par l'intermédiaire d'un demi-diagramme de probabilité reste applicable en l'absence de répétitions des points expérimentaux factoriels et en l'absence d'observations complémentaires relatives à un éventuel point central. Il n'en est pas de même pour l'analyse de la variance que nous avons présentée au paragraphe 5.5.2. La répétition des observations est en effet indispensable pour obtenir la ligne « Mesures » du tableau 5.5.3, et les observations complémentaires sont indispensables pour calculer les composantes « Var. rés. » et « Non-lin. » de ce tableau.

⊖ 5.5.4 Interprétation des résultats : régression multiple

1° Différentes possibilités

Une troisième approche du même problème est basée sur la régression multiple [STAT2, § 16.2 et 16.3; DAGNELIE, 1986, chap. 4]. Comme l'étude du demi-diagramme de probabilité, cette approche peut concerner aussi bien des mesures effectuées en plusieurs répétitions, y compris pour un point central (40 observations dans le cas envisagé), des mesures effectuées en plusieurs répétitions mais sans point central (32 observations dans le cas envisagé), des mesures qui auraient été effectuées sans répétitions sauf pour un point central (20 observations dans le cas envisagé), ou encore des mesures qui auraient été effectuées sans répétitions et pour un ensemble de points factoriels uniquement (16 observations dans le cas envisagé).

Nous n'examinerons que cette dernière possibilité, à partir des 16 premières moyennes de la dernière colonne du tableau 5.5.2, comme si seules ces données étaient disponibles.

2° Étude des seuls facteurs

Comme le schéma factoriel est du type 2^k , avec donc deux niveaux seulement pour chacun des facteurs, il ne permet au premier abord que d'établir une équation du premier degré.

En désignant les variables explicatives associées aux quatre facteurs par x_A , x_B , x_C et x_D , et en considérant comme valeurs de ces variables les valeurs codées -1 et $+1$, on obtient la relation :

$$y = 444 + 127x_A + 244x_B + 75x_C + 130x_D,$$

avec un écart-type résiduel estimé égal à 285 U/ml³¹.

On voit apparaître dans cette équation la moyenne générale de l'ensemble des observations relatives aux 16 points factoriels (444) et les effets des quatre facteurs (tableau 5.5.4), ce qui confirme que la régression multiple peut être une autre méthode de calcul de ces effets.

Les valeurs des variables t de STUDENT qui peuvent être associées aux quatre coefficients de régression :

$$t_A = 1,78, \quad t_B = 3,43, \quad t_C = 1,05 \quad \text{et} \quad t_D = 1,82,$$

montrent, avec 11 degrés de liberté, que seul le coefficient de x_B est significatif ($P_B = 0,0056$).

³¹ Il s'agit ici de l'écart-type résiduel relatif à la régression multiple, qui ne doit pas être confondu avec l'écart-type résiduel qui peut être déduit de l'analyse de la variance présentée au paragraphe 5.5.2.

Si on souhaite s'en tenir aux seules variables qui apportent une contribution significative, la solution du problème est donc la régression simple :

$$y = 444 + 244x_B,$$

avec un écart-type résiduel estimé égal à 328 U/ml.

Ces différents résultats confirment ceux qui ont été obtenus antérieurement en ce qui concerne l'importance relative des quatre facteurs.

3° Étude des facteurs et des interactions

On peut envisager d'introduire en outre, dans l'équation de régression, les différents produits de deux variables $x_A x_B$, $x_A x_C$, ..., $x_C x_D$.

On obtient alors une équation de régression à 10 variables explicatives dans laquelle, à nouveau, seule la variable x_B a une contribution significative ($t_B = 4,34$ et $P_B = 0,0075$, avec cinq degrés de liberté).

En allant plus loin, on peut aussi considérer comme variables explicatives les produits de trois variables $x_A x_B x_C$, $x_A x_C x_D$, ..., $x_B x_C x_D$, et éventuellement le produit des quatre variables $x_A x_B x_C x_D$.

Par une procédure de type *stepwise* (ou pas à pas) [DAGNELIE, 1986, § 4.5.2], on aboutit à l'équation suivante, dont tous les coefficients sont significatifs :

$$y = 444 + 127x_A + 244x_B + 75x_C + 130x_D \\ + 101x_A x_B - 148x_A x_C + 69x_B x_C - 117x_A x_C x_D,$$

avec un écart-type résiduel estimé égal à 110 U/ml. Cette équation est évidemment nettement meilleure que l'équation qui fait intervenir uniquement le facteur B, dont l'écart-type résiduel est trois fois plus élevé (328 U/ml).

On peut constater que les variables qui interviennent dans l'équation de régression correspondent aux différentes composantes de l'analyse de la variance qui étaient significatives au premier abord (colonnes F et P du tableau 5.5.3), et cela bien que les données prises en considération ne soient pas exactement les mêmes dans les deux cas (40 mesures individuelles pour l'analyse de la variance et 16 moyennes pour la régression multiple). D'autre part, comme pour les quatre facteurs, les coefficients de régression des termes produits sont exactement les effets des interactions qui y correspondent (tableau 5.5.4)³².

³² Les relations étroites qui existent entre l'analyse de la variance et la régression multiple découlent du fait que les différentes variables explicatives sont toutes non corrélées, en raison du caractère factoriel de l'expérience. Il en résulte notamment que les coefficients de la régression multiple sont égaux aux coefficients des régressions simples, que les sommes des carrés des écarts qui peuvent être associées à ces coefficients sont identiquement celles de l'analyse de la variance, etc. [STAT2, § 16.2.2; DAGNELIE, 1986, § 4.3 et 4.4].

4° Commentaires

Quelques remarques complémentaires méritent d'être formulées en ce qui concerne la régression multiple.

Tout d'abord, il faut noter que les carrés x_A^2 , x_B^2 , x_C^2 et x_D^2 des variables initiales ne peuvent pas être pris en considération comme variables explicatives, car ils sont tous uniformément égaux à 1.

D'autre part, la dernière possibilité que nous avons évoquée (régression faisant intervenir les quatre variables initiales et, éventuellement, toutes les variables produits) doit être envisagée avec une extrême prudence, en raison du nombre élevé de variables potentielles qu'elle permet de considérer, ce nombre étant égal au nombre d'observations moins une.

Enfin, les équations de régression pourraient faire intervenir les valeurs réelles des niveaux des facteurs, telles qu'elles sont données dans le tableau 5.5.1, ou leurs logarithmes, au lieu des valeurs codées -1 et $+1$, les valeurs des coefficients de régression étant alors modifiées en conséquence.

5° Utilité des différentes approches

En ce qui concerne les différentes approches que nous avons présentées, il n'est évidemment pas question de vouloir traiter, dans la pratique courante, tous les cas rencontrés selon les différentes procédures.

En adoptant diverses approches pour un même jeu de données, nous avons voulu mettre en évidence, au point de vue didactique, les relations et les concordances qui existent entre elles, en particulier en ce qui concerne l'analyse de la variance et la régression multiple, et aussi les discordances qui peuvent apparaître, en particulier quant à la méthode du demi-diagramme de probabilité par comparaison avec les autres méthodes.

En pratique, un choix doit être fait dans chaque cas a priori, en fonction notamment du ou des buts poursuivis. Un principe relativement général peut être d'utiliser la méthode du demi-diagramme de probabilité dans l'optique de l'identification des facteurs influents, souvent pour un nombre relativement important de facteurs, et de considérer l'analyse de la variance et la régression multiple comme des méthodes qui permettent une étude plus approfondie, l'une dans une optique d'interprétation des facteurs et de leurs interactions, et l'autre dans une optique d'estimation ou de prévision, et éventuellement de détermination de conditions optimales, de production ou de fabrication.

⊖ 5.5.5 Étude de deux expériences factorielles fractionnaires

1° Subdivision des données

Les données que nous avons examinées au cours des paragraphes précédents permettent aussi d'illustrer les notions d'expériences factorielles fractionnaires. Il

suffit pour cela de scinder les données factorielles du tableau 5.5.2 en deux parties, correspondant aux deux ensembles d'objets que nous avons identifiés au paragraphe 2.3.3.4°, à savoir d'une part :

a, b, c, d, abc, abd, acd, bcd,

et d'autre part :

(1), ab, ac, ad, bc, bd, cd, abcd.

Le tableau 5.5.5 présente les données de cette manière, en supposant qu'on ne dispose que d'une seule observation, en l'occurrence les moyennes du tableau 5.5.2, pour chacun des points expérimentaux factoriels³³.

Tableau 5.5.5. Étude des conditions de production d'une enzyme : présentation des données sous la forme de deux ensembles factoriels fractionnaires.

Obj.	A	B	C	D	Moy.	Obj.	A	B	C	D	Moy.
a	+1	-1	-1	-1	27,0	(1)	-1	-1	-1	-1	38,5
b	-1	+1	-1	-1	265,5	ab	+1	+1	-1	-1	715,0
c	-1	-1	+1	-1	84,0	ac	+1	-1	+1	-1	73,0
d	-1	-1	-1	+1	38,0	ad	+1	-1	-1	+1	673,0
abc	+1	+1	+1	-1	756,5	bc	-1	+1	+1	-1	557,5
abd	+1	+1	-1	+1	1.160,0	bd	-1	+1	-1	+1	38,5
acd	+1	-1	+1	+1	128,5	cd	-1	-1	+1	+1	538,0
bcd	-1	+1	+1	+1	982,0	abcd	+1	+1	+1	+1	1.033,5

2° Première expérience fractionnaire

La partie gauche du tableau 5.5.5 constitue une expérience factorielle fractionnaire 2^{4-1} , comportant seulement huit observations pour quatre facteurs. Cette expérience est de résolution IV (§ 2.3.3.7°), les différents facteurs étant confondus avec les interactions de trois facteurs, les interactions de deux facteurs étant confondues deux à deux, et aucune information n'étant disponible en ce qui concerne l'interaction des quatre facteurs (§ 2.3.3.4°).

En faisant abstraction des conclusions qui ont été obtenues au cours des paragraphes précédents à propos de l'expérience complète, on peut analyser les huit observations en question par l'analyse de la variance, par l'étude du demi-diagramme de probabilité, et par la régression multiple (nous examinerons plus loin les huit autres observations, qui constituent la partie droite du tableau 5.5.5).

³³ Il est évident que, s'il s'agissait réellement d'observations individuelles, les décimales seraient tout à fait superflues, pour des valeurs allant de 27 à 1.160. Nous n'avons cependant pas voulu les supprimer, pour ne pas introduire de discordances, même minimes, par rapport aux résultats antérieurs.

3° Analyse de la variance

Les résultats de l'analyse de la variance sont présentés dans la première partie du tableau 5.5.6. Selon ces résultats, seul le facteur B (lactosérum) est significatif.

Tableau 5.5.6. Étude des conditions de production d'une enzyme : tableaux d'analyse de la variance relatifs à deux expériences factorielles fractionnaires.

Sources de variation	Degrés de liberté	Sommes des carrés des écarts	Carrés moyens	F	P
A	1	61.688	61.688	0,95	0,40
B	1	1.041.485	1.041.485	16,0 *	0,028
C	1	26.508	26.508	0,41	0,57
D	1	172.725	172.725	2,65	0,20
Variation résiduelle	3	195.551	65.184		
Totaux	7	1.497.957			
A	1	218.461	218.461	1,48	0,31
B	1	130.561	130.561	0,89	0,42
C	1	67.896	67.896	0,46	0,55
D	1	101.025	101.025	0,69	0,47
Variation résiduelle	3	442.016	147.339		
Totaux	7	959.959			

Il faut noter toutefois que la variation « résiduelle » regroupe en fait les contributions des trois couples d'interactions de deux facteurs (AB-CD, AC-BD et AD-BC). Si on avait fait apparaître individuellement chacun de ces termes, on n'aurait disposé d'aucune composante de variation résiduelle, et donc d'aucune possibilité de test de signification.

4° Demi-diagramme de probabilité

Les effets des facteurs et des interactions, calculés de la même manière qu'au paragraphe 5.5.3.1°, sont donnés dans la colonne « Expér. 1 » du tableau 5.5.7, et le demi-diagramme de probabilité relatif à ces effets est présenté dans la partie gauche de la figure 5.5.3. L'examen de ces deux éléments d'informations confirme l'importance du facteur B.

On remarquera que, dans le tableau 5.5.7, nous avons utilisé une notation du type « A (BCD) » en vue d'indiquer qu'il s'agit soit de « A-BCD », le facteur A étant confondu avec l'interaction BCD, soit du seul facteur A, mais alors sous l'hypothèse que l'interaction BCD est nulle. Très souvent, seule une notation de type « A » est utilisée, en perdant de vue la confusion possible du facteur considéré avec une éventuelle interaction non nulle de trois facteurs (ou de plus de trois facteurs dans d'autres cas).

Tableau 5.5.7. Étude des conditions de production d'une enzyme : effets des facteurs et des interactions relatifs à deux expériences factorielles fractionnaires (U/ml).

Facteurs et interactions	Effets	
	Expér. 1	Expér. 2
A (BCD)	88	165
B (ACD)	361	128
C (ABD)	58	92
D (ABC)	147	112
AB-CD	79	123
AC-BD	-133	-162
AD-BC	-21	117

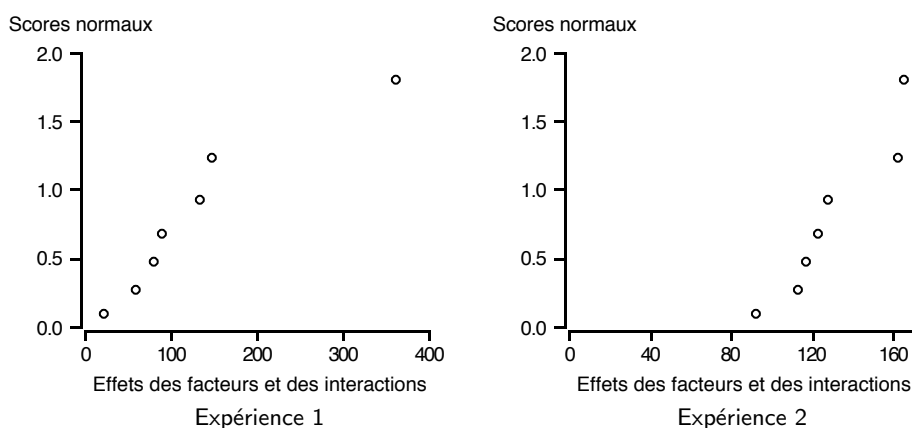


Figure 5.5.3. Étude des conditions de production d'une enzyme : demi-diagrammes de probabilité relatifs à deux expériences factorielles fractionnaires.

En réalité, cette remarque s'applique aussi à l'analyse de la variance (tableau 5.5.6), dans laquelle les notations « A », « B », « C » et « D » et les tests correspondants supposent en fait que les quatre interactions de trois facteurs sont nulles.

Quant à la régression multiple, elle n'ajoute pas grand-chose aux deux autres approches, dans la mesure où elle confirme uniquement la signification du facteur B.

5° Deuxième expérience fractionnaire

L'étude de la deuxième partie du tableau 5.5.5 peut être intéressante au point de vue didactique. Les informations en question peuvent en effet être considérées

comme constituant une deuxième expérience factorielle fractionnaire, indépendante de la première et devant donner en principe des résultats comparables.

L'analyse de la variance de ces données constitue la deuxième partie du tableau 5.5.6, tandis que les effets des facteurs et des interactions sont présentés dans la colonne « Expér. 2 » du tableau 5.5.7, et le demi-diagramme de probabilité constitue la partie droite de la figure 5.5.3³⁴. Aucun effet n'apparaît significatif pour cette deuxième expérience, les résultats obtenus étant très différents en particulier en ce qui concerne le facteur B ($F = 0,89$ au lieu de 16,0 et $P = 0,42$ au lieu de 0,028).

Les différences observées entre les conclusions des deux expériences partielles, réalisées dans des conditions identiques, soulignent le caractère aléatoire de tout processus expérimental, en particulier quand le nombre d'observations est très limité.

³⁴ En examinant la partie droite de la figure 5.5.3, on notera que l'échelle des abscisses est très différente de celle de la partie gauche.

Chapitre 6

Les expériences en blocs aléatoires complets

Sommaire

6.1 Principes

6.1.1 Les expériences en champ

6.1.2 Quelques autres situations

6.2 Analyse des résultats

6.3 Discussion

6.4 Exemple 1 : expérience en blocs aléatoires complets (planification)

6.4.1 Présentation

6.4.2 Parcelles sans bordures

6.4.3 Parcelles avec bordures

6.5 Exemple 2 : expérience en blocs aléatoires complets (analyse de résultats)

6.5.1 Présentation et données

6.5.2 Analyse des résultats : analyse de la variance

6.5.3 Analyse des résultats : régression

6.1 Principes

6.1.1 Les expériences en champ

1° Notion de bloc aléatoire complet

Dans le cas des expériences en champ, au sens large (champ, verger, forêt, etc.), on entend classiquement par bloc un ensemble de parcelles voisines et très semblables les unes aux autres, quant aux conditions de croissance et de développement de la végétation. Ces blocs sont dits complets quand tous les objets mis en expérience sont présents dans chacun d'eux, le nombre de parcelles par bloc étant au moins égal au nombre d'objets.

La répartition des objets au sein des différents blocs se fait normalement de façon complètement aléatoire et indépendamment d'un bloc à l'autre, d'où la notion de *blocs aléatoires complets*, aussi appelés *blocs randomisés*¹ et parfois *blocs FISHER*.

Cette répartition « au hasard » dans les blocs peut être réalisée à l'aide de tables de nombres aléatoires classiques ou, plus facilement, à l'aide de tables de permutations aléatoires, de 10, 20 ou 50 nombres par exemple. Une telle répartition, y compris éventuellement la préparation du plan d'expérience tel qu'il doit être installé sur le terrain, peut également être faite par ordinateur.

2° Forme des blocs

La forme des blocs doit toujours être définie en même temps que la forme des parcelles (§ 3.3), de manière à garantir une similitude aussi grande que possible des conditions de croissance et de développement à l'intérieur de chacun des blocs, ce qui correspond aussi, pour un champ d'expérience donné, à une hétérogénéité maximum entre blocs.

Quand le terrain dont on dispose est relativement homogène, il y a généralement intérêt à adopter pour les blocs, comme pour les parcelles, une forme aussi carrée que possible. Par contre, quand le terrain présente dans une certaine direction un net gradient de fertilité (ou de toute autre nature), il y a lieu de donner autant que possible aux blocs une forme allongée perpendiculairement à cette direction, ce qui revient normalement à disposer les blocs perpendiculairement aux parcelles.

La figure 6.1.1 illustre ces principes, dans le cas d'une expérience qui ferait intervenir sept objets et quatre blocs, en présence d'un gradient qui se marquerait de gauche à droite, dans le sens de la longueur du champ d'expérience. La répartition au hasard a été réalisée à l'aide des quatre dernières lignes de la partie droite de la table de permutations aléatoires des nombres de 1 à 10 donnée en annexe (table 1.1), en négligeant les valeurs supérieures à 7.

¹ En anglais : *randomized blocks, complete blocks, randomized complete blocks*.

3	4	4	6
6	3	5	3
1	5	2	1
2	1	7	5
7	7	3	2
4	2	1	4
5	6	6	7
Bloc 1	Bloc 2	Bloc 3	Bloc 4
Gradient			

Figure 6.1.1. Exemple de forme et d'orientation des parcelles et des blocs en présence d'un gradient (de fertilité ou de toute autre nature).

3° Généralisation

Le principe des blocs aléatoires complets, qui est particulièrement facile à exposer dans le cas des expériences en champ, peut être étendu à de nombreuses autres situations. L'objectif est toujours de constituer des groupes d'unités expérimentales aussi semblables que possible les unes aux autres, de manière à réduire, au sein des blocs, l'hétérogénéité des conditions expérimentales.

La diversité des situations qui peuvent se présenter, y compris dans un même domaine d'application, génère évidemment une grande variété dans la notion de bloc elle-même.

6.1.2 Quelques autres situations

1° Productions végétales

Nous avons introduit ci-dessus le concept de bloc dans le cas d'un champ de forme régulière, dans lequel pouvaient être délimités des blocs eux-mêmes de forme régulière. En pratique, en vue d'assurer leur homogénéité, les blocs peuvent aussi être conçus en étant de forme tout à fait irrégulière, voire même constitués d'éléments de terrain disjoints.

Ainsi, en arboriculture fruitière par exemple, les blocs peuvent être formés d'arbres de configuration semblable (mêmes dimensions et mêmes dispositions des branches notamment), sans que ces arbres soient nécessairement voisins les uns des autres.

Dans le même domaine, les blocs peuvent également être des arbres, pour chacun desquels les unités expérimentales sont des branches ou des rameaux, si

du moins les objets considérés peuvent être étudiés sur des branches ou sur des rameaux individuels (différents modes d'éclaircissage des fruits par exemple).

Les photographies 1, 7, 8, 11, 12, 15 et 16 et leurs légendes [DAGNELIE, 2009] donnent diverses illustrations de la notion de bloc, en champ et en verger.

2° Productions animales

D'une manière fort semblable, en matière de productions animales, les blocs peuvent être tout d'abord des groupes d'animaux de même race, de même sexe, de même âge et de même poids (ou d'âges et de poids semblables), ou des groupes d'animaux de même père, de même sexe et de même âge (demi-frères ou demi-sœurs), ou mieux encore, quand cela s'avère possible, des animaux d'une même nichée et de même sexe. Tel peut être le cas par exemple pour des nichées de porcelets, au sein desquelles les différents objets peuvent être répartis de manière complètement aléatoire, et cela indépendamment d'une nichée à l'autre, chacune des nichées constituant un bloc.

Mais les blocs peuvent aussi être des animaux considérés individuellement, quand il est possible de leur appliquer simultanément deux ou plusieurs traitements sur différentes parties du corps, qui sont alors considérées comme étant différentes unités expérimentales.

3° Domaine médical

Les mêmes principes peuvent s'appliquer au domaine médical, les blocs étant des groupes de patients qui présentent des caractéristiques semblables, quant au sexe, à l'âge, au degré de développement de certaines pathologies, etc., et au sein desquels peuvent être répartis les différents traitements.

Les problèmes particuliers de randomisation que nous avons évoqués au paragraphe 5.1.3° se présentent cependant de manière plus aiguë ici. Plus encore que pour les expériences complètement aléatoires, il peut en effet s'avérer difficile de concilier la constitution de blocs et l'affectation aléatoire des différents traitements aux différents patients, à l'intérieur des blocs, avec le caractère aveugle de cette répartition.

Les blocs peuvent également être des patients, qui sont soumis simultanément à deux ou plusieurs traitements. On peut penser notamment à la comparaison de traitements anti-allergiques, à laquelle nous avons fait allusion antérieurement, en considérant que l'unité expérimentale est une certaine surface de peau (§ 3.1.3°). Mais on peut évoquer aussi à titre d'exemple l'étude de certaines affections oculaires, chaque œil pouvant constituer une unité expérimentale et le patient étant un bloc de deux unités expérimentales.

Quant à la terminologie, en matière médicale, la notion de bloc est parfois associée à celle de *stratification*², avec toutefois certaines nuances [WITTES, 1998].

² En anglais : *stratification*.

4° **Domaine industriel et laboratoire**

Dans le domaine industriel comme en laboratoire, les blocs peuvent être des ensembles de manipulations ou d'essais effectués durant des périodes d'une durée donnée (des demi-journées ou des journées, par exemple), au cours desquelles on peut penser que les conditions de travail sont particulièrement stables. Il peut s'agir aussi d'ensembles de manipulations ou d'essais réalisés sur un même appareil, par opposition à d'autres appareils semblables constituant d'autres blocs, ou par une même personne ou une même équipe de travailleurs, ou sur un même lot de matière première, etc.

C'est sans doute dans ce secteur qu'on peut être le plus imaginaire, en vue de maîtriser au mieux la variabilité du matériel expérimental et des conditions de réalisation de l'expérience. On peut citer encore, à titre d'exemple très particulier, la possibilité de comparer des shampoings sur des « demi-têtes », les cheveux d'une même personne pouvant être lavés pour moitié avec un premier shampoing et pour moitié avec un deuxième shampoing, chaque personne constituant alors un bloc de deux unités expérimentales.

6.2 Analyse des résultats

1° **Un facteur**

Dans le cas le plus simple d'une expérience faisant intervenir un seul facteur, l'interprétation statistique des résultats qui est la plus courante est basée sur l'analyse de la variance à deux critères de classification. Le facteur subsidiaire blocs vient en effet s'ajouter au facteur principal envisagé initialement.

Le facteur blocs est considéré le plus souvent comme aléatoire, dans la mesure où on ne cherche pas à obtenir des conclusions relatives aux seuls blocs étudiés, mais bien à une population ou à un ensemble plus vaste, dont les quelques blocs étudiés sont représentatifs. Il en résulte que le modèle d'analyse de la variance pris en considération est en général un modèle croisé mixte ou aléatoire [STAT2, § 10.3.3 et 10.3.4]. En outre, pour chacune des variables considérées, on ne dispose fréquemment que d'une seule observation par unité expérimentale, ce qui correspond au cas des « échantillons d'une seule observation » [STAT2, § 10.3.6].

Les remarques que nous avons formulées au paragraphe 5.2.1°, en matière d'examen préliminaire des données (respect des conditions d'application et transformations de variables) et d'analyse ultérieure (comparaisons particulières et multiples de moyennes essentiellement) restent d'application. Ces remarques concernent d'ailleurs tous les cas d'analyse de la variance que nous évoquerons dans la suite.

De même, comme pour les expériences complètement aléatoires (§ 5.2.2°), l'analyse de la variance peut céder la place à d'autres méthodes, de type non

paramétrique, d'étude de tables de contingence, de régression, etc. Il faut citer en particulier le test non paramétrique de FRIEDMAN [STAT2, § 10.3.8].

Enfin, on se rappellera que, si le facteur blocs est considéré comme fixe et si on ne dispose que d'une seule observation par unité expérimentale et par variable observée, aux conditions de normalité et d'égalité des variances, s'ajoute une condition d'additivité du modèle d'analyse de la variance, cette condition pouvant être vérifiée dans une certaine mesure par le test de TUKEY [STAT2, § 10.3.6].

2° Deux ou plusieurs facteurs

Pour deux ou plus de deux facteurs, l'analyse de la variance est aussi la méthode d'analyse qui est sans doute la plus utilisée. Dans le cas des expériences factorielles complètes par exemple (§ 2.3.2), il s'agit normalement de modèles croisés mixtes ou aléatoires d'analyse à trois ou plus de trois critères de classification [STAT2, § 11.2.3, 11.2.4 et 11.4.2].

Il faut noter à ce sujet que les différentes interactions qui lient le facteur blocs à un ou plusieurs autres facteurs sont très souvent du même ordre de grandeur, et qu'en conséquence, ces interactions sont fréquemment regroupées en une seule composante, de manière à augmenter l'efficacité des comparaisons. Le carré moyen qui résulte de ce regroupement est couramment qualifié, de façon quelque peu abusive, de carré moyen « résiduel ».

Dans le cas des surfaces de réponse, des mélanges, etc. (§ 2.4), la régression est généralement associée à l'analyse de la variance.

6.3 Discussion

1° Avantages

Les expériences en blocs aléatoires complets présentent de multiples avantages. Elles sont en premier lieu souvent aussi simples, voire même plus simples à organiser que les expériences complètement aléatoires.

Elles peuvent en outre être réalisées pour n'importe quel nombre d'objets et n'importe quel nombre de répétitions, la seule restriction étant que le nombre de répétitions doit être, d'une façon générale, identique pour les différents objets. Il est toutefois possible de ne pas respecter entièrement cette dernière contrainte en attribuant à certains objets (témoin par exemple) deux ou plusieurs unités expérimentales par bloc, ce qui conduit à adopter pour ces objets un nombre de répétitions qui est un multiple du nombre de blocs (§ 2.2.2.2°).

Les expériences en blocs aléatoires complets possèdent également l'avantage de conserver toutes leurs propriétés quand, pour quelque raison que ce soit, un ou plusieurs objets ou un ou plusieurs blocs doivent être éliminés, par exemple au moment de la réalisation des observations ou lors de l'analyse des résultats.

Enfin, ces expériences sont en général plus efficaces que les expériences complètement aléatoires. Pour un même matériel expérimental, la précision ou la puissance des comparaisons est plus élevée, ou inversement, pour une même précision ou une même puissance, le matériel expérimental peut être plus réduit.

2° Efficacité relative : détermination approchée

L'*efficacité relative*³ du dispositif en blocs aléatoires complets, par comparaison avec le dispositif complètement aléatoire, peut être estimée en première approximation par le rapport des carrés moyens qui servent de bases de comparaison dans les deux analyses de la variance [STAT2, § 10.3.6].

En vue de préciser les choses, considérons une expérience en blocs aléatoires complets qui comporterait p objets et q blocs, et désignons par SCE_b et SCE_{ab} respectivement la somme des carrés des écarts relative au facteur blocs et la somme des carrés des écarts relative à l'interaction objets-blocs. Le carré moyen qui sert de base de comparaison dans l'analyse de la variance à deux critères de classification est dans ces conditions :

$$CM_{ab} = SCE_{ab}/[(p-1)(q-1)],$$

tandis que le carré moyen résiduel de l'analyse de la variance à un critère de classification, qui ne tiendrait compte que du seul facteur objets, en négligeant le facteur blocs, serait :

$$CM_r = (SCE_b + SCE_{ab})/[(q-1) + (p-1)(q-1)].$$

Le rapport des carrés moyens, et donc l'efficacité relative, est en conséquence :

$$CM_r/CM_{ab} = (p-1)(SCE_b/SCE_{ab} + 1)/p.$$

Cette formulation montre bien que le gain de précision ou de puissance du dispositif en blocs aléatoires complets, par rapport au dispositif complètement aléatoire, est d'autant plus important que le facteur blocs, matérialisé par la somme des carrés des écarts SCE_b , est lui-même important.

Cette présentation de l'efficacité relative n'est cependant qu'approchée et conduit à une surestimation, qui ne peut pas être négligée quand le nombre d'objets et le nombre de blocs sont réduits.

⊖ 3° Efficacité relative : détermination exacte

Deux modifications doivent intervenir en vue d'aboutir à un résultat tout à fait correct.

D'une part, on peut montrer qu'en raison des restrictions apportées à la randomisation par l'introduction du facteur blocs, la quantité CM_r , considérée ci-dessus

³ En anglais : *relative efficiency*.

est en moyenne une valeur surestimée de la variance résiduelle d'une éventuelle expérience complètement aléatoire. Une estimation non biaisée de cette variance résiduelle est donnée par la relation :

$$CM'_r = [\text{SCE}_b + (p-1)q \text{CM}_{ab}] / (pq-1).$$

D'autre part, l'introduction du facteur blocs provoque aussi une réduction du nombre de degrés de liberté du carré moyen qui sert de base de comparaison, et donc une réduction de la précision ou de la puissance du test. Une correction peut être apportée à ce sujet en multipliant le quotient CM'_r/CM_{ab} par la quantité :

$$\frac{[p(q-1)+3]}{[p(q-1)+1]} \frac{[(p-1)(q-1)+1]}{[(p-1)(q-1)+3]},$$

les valeurs $(p-1)(q-1)$ et $p(q-1)$ étant les nombres de degrés de liberté relatifs aux deux carrés moyens CM_{ab} et CM'_r (ou ci-dessus CM_{ab} et CM_r).

4° Conséquences pratiques

Le fait que l'efficacité relative est fonction de l'importance des différences entre blocs n'est pas sans conséquences quant à la réalisation pratique des expériences. Non seulement, comme nous l'avons indiqué au paragraphe 6.1, les blocs doivent être conçus de telle sorte qu'ils soient aussi homogènes que possible, et donc aussi différents que possible les uns des autres, mais il peut être utile en outre de confondre avec le facteur blocs certaines sources de variation subsidiaires.

Si par exemple, dans une expérience en champ, certains travaux ne peuvent pas être réalisés d'une traite, pour l'ensemble de l'expérience, il y a intérêt à interrompre le travail entre deux blocs consécutifs, plutôt qu'au milieu de l'un ou l'autre bloc, de manière à conserver une homogénéité aussi grande que possible au sein de chacun des blocs.

De même, si le travail d'observation doit être réparti entre deux ou plusieurs personnes, il y a intérêt à confier entièrement un ou plusieurs blocs à chacune des personnes concernées, afin de confondre les éventuelles différences d'appréciation des observateurs avec le facteur blocs.

5° Données manquantes

L'existence de *données manquantes*⁴ peut constituer dans une certaine mesure une entrave à l'utilisation du dispositif en blocs aléatoires complets.

Si la présence de données manquantes peut être considérée comme purement aléatoire et si ces données sont peu nombreuses, une solution relativement simple consiste à procéder à l'estimation des valeurs manquantes et, corrélativement, à une réduction de certains nombres de degrés de liberté [STAT2, § 10.4.3]. Si

⁴ En anglais : *missing data*.

par contre, les données manquantes sont nombreuses, leur nombre dépassant par exemple un dixième du nombre total d'observations, le recours à l'analyse de la variance non orthogonale, à l'analyse de la covariance, ou encore au modèle linéaire mixte peut s'imposer (§ 12.4.1, 12.4.2 et 12.4.4).

Les problèmes liés au nombre élevé de données manquantes, doublés des difficultés particulières de randomisation (§ 6.1.2.3°), ont comme conséquence que le dispositif en blocs aléatoires complets est relativement peu utilisé dans le domaine médical, par comparaison notamment avec le secteur agronomique.

Nous donnons aussi quelques informations complémentaires relatives à la question des données manquantes au paragraphe 12.5.

6° Autres dispositifs en blocs

La dimension des blocs et le fait que tous les objets doivent être présents au moins une fois dans chacun des blocs constituent dans certains cas un frein à l'utilisation du dispositif en blocs aléatoires complets.

D'une part, certains blocs sont par essence même de très petite dimension. Nous avons cité au paragraphe 6.1.2 plusieurs exemples de blocs de deux unités expérimentales, et on pourrait envisager aussi certains blocs qui, par leur nature, ne comporteraient que trois ou quatre unités. De tels blocs ne permettent évidemment pas de comparer, en blocs complets, plus de deux, trois ou quatre objets.

D'autre part, pour de grands nombres d'objets (plus de 15 ou 20 objets par exemple) et pour un matériel expérimental peu homogène, l'utilisation de blocs complets peut être inopportune, l'efficacité des expériences en blocs complets pouvant alors être relativement faible.

Enfin, la présence de tous les objets au moins une fois dans chacun des blocs est une contrainte qui s'adapte mal à de nombreuses expériences relatives à l'étude des surfaces de réponse, y compris le cas des mélanges, et aux plans optimaux (§ 2.4). En effet, dans ces différents cas, les objets ou la plupart d'entre eux au moins ne sont souvent présents qu'en une seule répétition.

L'utilisation d'autres dispositifs, tels que les dispositifs en blocs incomplets, en réseaux, etc. (§ 9.1 et 10.1), doit alors être envisagée. À cet égard, il faut noter que la *constitution de blocs*⁵, complets ou non, est un principe très général qui, avec la randomisation, intervient dans de très nombreux dispositifs expérimentaux.

Des informations relatives à la dimension maximum à donner aux blocs et à l'efficacité des blocs incomplets par rapport aux blocs complets, dans le cas des expériences en champ, sont présentées notamment par LIN et BINNS [1984] et PATTERSON et HUNTER [1983].

[Il faut signaler aussi que la recherche de dispositifs insensibles aux dérives, que nous avons évoqués à propos des expériences complètement aléatoires (§ 5.3.4°),

⁵ En anglais : *blocking*.

peut être étendue au cas des expériences en blocs [MAJUMDAR et MARTIN, 2002; TACK et VANDEBROEK, 2002].

⊖ 7° Corrélations entre unités expérimentales

Dans l'utilisation de nichées comme blocs (§ 6.1.2.2°) et dans d'autres cas comparables, la distinction entre blocs correspond à une réalité physique. Dans de nombreuses autres situations par contre, telles que la délimitation de blocs dans des champs d'expériences ou la constitution de blocs dans des successions d'essais effectués en séquence, les blocs peuvent être tout à fait artificiels.

Bien souvent, la réalité ne correspond donc pas à des coupures nettes entre blocs, mais à des évolutions progressives, dans l'espace ou dans le temps, sous forme de gradients. Comme le montre notamment l'exemple du paragraphe 3.6, ces gradients sont générateurs de corrélations entre parcelles ou entre unités expérimentales voisines.

Différents auteurs ont étudié ces corrélations, ainsi que la possibilité d'en tenir compte dans l'analyse des résultats [AASTVEIT, 1983; BERGONZINI et LEDOUX, 1988; HONG *et al.*, 2005; WATSON, 2000].

6.4 Exemple 1 : expérience en blocs aléatoires complets (planification)

6.4.1 Présentation

1° Principe

Afin de bien préciser la notion de bloc, telle qu'elle apparaît dans les expériences en champ, ainsi que les notions relatives à la forme à donner aux blocs, en relation notamment avec la configuration des parcelles, nous poursuivons ici l'étude de l'expérience d'uniformité dont il a déjà été question au paragraphe 3.6.

Nous supposons dans la suite que la plantation de théiers présentée à la figure 3.6.1 est destinée à l'installation d'une expérience qui comporte cinq objets (quatre fumures et un témoin, par exemple), et nous nous basons sur les données étudiées antérieurement et relatives à deux *tippings* (tableau 3.6.1).

2° Différents découpages

La figure 6.4.1 présente neuf découpages différents du terrain d'expérience en blocs de cinq parcelles, l'étendue des parcelles allant de 2,88 m² (2,4 m sur 1,2 m, soit quatre théiers par parcelle) à 46,08 m² (9,6 m sur 4,8 m, soit 64 théiers par parcelle), et corrélativement, le nombre de blocs variant de 48 à 3.

On notera que, pour tenir compte de la plus grande hétérogénéité de la plantation dans le sens horizontal (tableaux 3.6.1 et 3.6.2, et figure 3.6.3), les parcelles

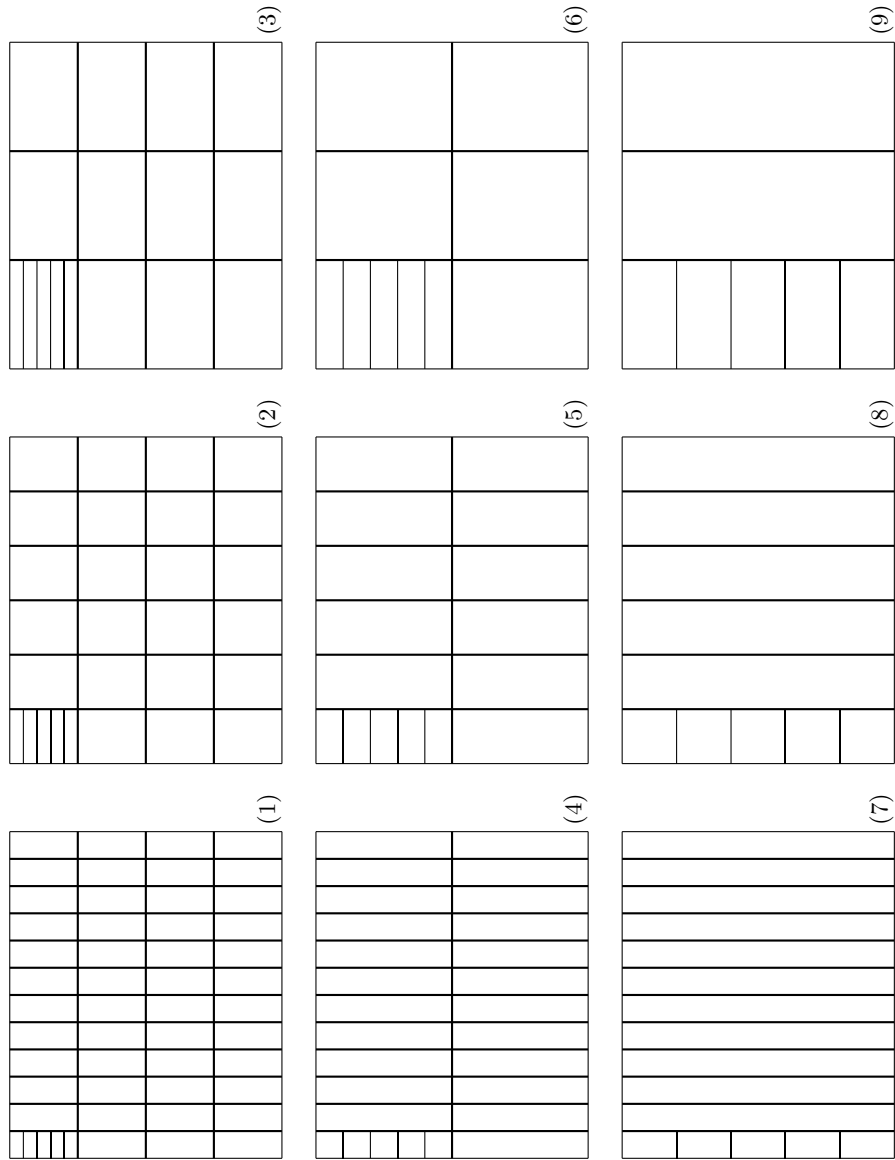


Figure 6.4.1. Planification d'une expérience sur théier : différents découpages du terrain en blocs de cinq parcelles.

et les blocs ont été disposés de manière telle que les premières soient autant que possible allongées horizontalement (c'est-à-dire parallèlement au « gradient de fertilité » le plus important) et les seconds allongés verticalement (c'est-à-dire perpendiculairement à ce « gradient de fertilité »).

À partir des données du tableau 3.6.1, on peut alors calculer dans chaque cas les sommes des carrés des écarts et les carrés moyens totaux, entre blocs et dans les blocs, et en déduire diverses informations quant à la précision des comparaisons de moyennes.

De plus, on peut envisager le problème à la fois pour des parcelles sans bordures (§ 6.4.2) et pour des parcelles avec bordures (§ 6.4.3).

6.4.2 Parcelles sans bordures

1° Premier découpage

Dans le cas n° 1 de la figure 6.4.1 (parcelles expérimentales confondues avec les parcelles unitaires initiales), la somme des carrés des écarts totale et la variance ou le carré moyen correspondant sont :

$$SCE_t = 834,2238 \quad \text{et} \quad CM_t = 834,2238/239 = 3,4905;$$

la somme des carrés des écarts et le carré moyen entre blocs sont :

$$SCE_b = 630,4548 \quad \text{et} \quad CM_b = 630,4548/47 = 13,4139;$$

tandis que la somme des carrés des écarts et le carré moyen dans les blocs ou résiduels sont :

$$SCE_r = 203,7690 \quad \text{et} \quad CM_r = 203,7690/192 = 1,0613.$$

La valeur 3,4905 donne une idée de ce que serait la variabilité résiduelle d'une expérience complètement aléatoire dont les parcelles auraient une étendue de 2,88 m² (quatre théiers par parcelle). Il y correspond un écart-type égal à 1,87 t/ha, un coefficient de variation égal à 51,4 %, une erreur standard des différences de moyennes entre objets égale à 1,87/ $\sqrt{24}$ ou 0,38 t/ha, et un coefficient de variation de ces différences égal à 10,5 %⁶.

De même, la valeur 1,0613 donne une idée de ce que pourrait être, dans les mêmes conditions, la variabilité résiduelle d'une expérience en blocs aléatoires complets. On peut en déduire, entre autres choses, le coefficient de variation résiduelle, égal à 28,3 % au lieu de 51,4 %, et le coefficient de variation des différences de moyennes, égal à 5,8 % au lieu de 10,5 %.

⁶ La valeur 24 qui intervient dans la détermination de l'erreur standard des différences de moyennes est égale au nombre de répétitions (48) divisé par 2, puisqu'il s'agit de la différence de deux moyennes.

En outre, le rapport :

$$3,4905/1,0613 = 3,29 \text{ ou } 329 \%,$$

est une estimation de ce que serait, dans ces conditions, l'efficacité relative de l'expérience en blocs, par comparaison avec l'expérience complètement aléatoire.

2° Autres découpages

Nous donnons aussi, à titre d'exemple, quelques résultats intermédiaires relatifs au cas n° 6 de la figure 6.4.1. En fonction des données du tableau 3.6.1, les rendements moyens des 30 parcelles de 9,6 m sur 2,4 m, réparties en six blocs, figurent dans le tableau 6.4.1. On peut en déduire les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \text{SCE}_t &= 72,1617 & \text{et} & & \text{CM}_t &= 2,4883, \\ \text{SCE}_b &= 63,7942 & \text{et} & & \text{CM}_b &= 12,7588, \\ \text{SCE}_r &= 8,3675 & \text{et} & & \text{CM}_r &= 0,3486. \end{aligned}$$

Tableau 6.4.1. Planification d'une expérience sur théier : rendements moyens des deux *tippings* pour des parcelles de 9,6 m sur 2,4 m (32 théiers par parcelle), en tonnes par hectare.

1,59	2,82	3,53
1,74	3,68	4,53
1,82	3,71	4,42
1,70	3,30	6,11
1,42	3,49	6,32
1,59	3,92	5,27
1,98	4,11	6,34
1,72	3,95	5,58
2,59	3,77	6,22
2,72	3,65	5,50

Il en résulte qu'en tenant compte du facteur blocs, le coefficient de variation résiduelle est égal à 16,2 % et le coefficient de variation des différences de moyennes entre objets est égal à 9,4 %. Et l'efficacité relative, par rapport à l'expérience complètement aléatoire qui serait constituée de parcelles de mêmes dimensions, est égale à 714 %.

Sans passer en revue de façon détaillée les autres cas présentés à la figure 6.4.1, nous faisons figurer dans le tableau 6.4.2 l'essentiel des résultats obtenus ci-dessus et les résultats correspondants relatifs aux autres situations (la dernière colonne du tableau 6.4.2 devant être examinée plus loin). Nous avons également introduit dans ce tableau les résultats relatifs à un découpage en quatre blocs (parcelles de

Tableau 6.4.2. Planification d'une expérience sur théier : résultats de différents découpages du terrain dans le cas de parcelles sans bordures.

Numéros de la fig. 6.4.1	Dimensions des parcelles (m)	Nombres de théiers par parc.	Nombres de blocs	Coeff. de variation résiduelle	C. de var. des différ. de moy.	Efficacité relative (%)	Différences significat. (%)
1	2,4 × 1,2	4	48	28,3	5,8	329	12 à 19
2	4,8 × 1,2	8	24	21,1	6,1	500	12 à 20
4	2,4 × 2,4	8	24	23,4	6,8	413	14 à 22
3	9,6 × 1,2	16	12	17,6	7,2	641	14 à 23
5	4,8 × 2,4	16	12	17,7	7,2	642	14 à 23
7	2,4 × 4,8	16	12	18,5	7,6	593	15 à 24
6	9,6 × 2,4	32	6	16,2	9,4	714	19 à 30
8	4,8 × 4,8	32	6	15,6	9,0	764	18 à 29
–	7,2 × 4,8	48	4	14,9	10,6	730	21 à 34
9	9,6 × 4,8	64	3	15,3	12,5	792	25 à 40

7,2 m sur 4,8 m, avec 48 théiers par parcelle), qui n'apparaît pas dans la figure 6.4.1.

Les relations entre la surface des parcelles et le coefficient de variation résiduelle, d'une part, et entre la surface des parcelles et le coefficient de variation des différences de moyennes, d'autre part, sont également présentées sous forme graphique par les points blancs de la figure 6.4.2.

3° Examen des résultats

Un rapide examen de l'ensemble des résultats montre que le coefficient de variation résiduelle diminue progressivement quand les dimensions des parcelles augmentent. Mais comme, corrélativement, le nombre de blocs diminue aussi, le coefficient de variation des différences de moyennes et l'efficacité relative, par rapport aux expériences complètement aléatoires constituées de parcelles de mêmes dimensions, évoluent par contre en sens opposé.

Les constatations relatives au coefficient de variation résiduelle et à l'efficacité relative pourraient faire croire que les expériences « les meilleures » sont celles qui font intervenir de grandes parcelles. Mais en raison de l'objectif même de l'expérience, l'élément essentiel à prendre en considération est en fait la précision des comparaisons de moyennes, qui est représentée ici par le coefficient de variation de leurs différences.

Comme ce coefficient augmente, de façon d'ailleurs quasi linéaire (figure 6.4.2), en fonction de la surface des parcelles, il apparaît que la préférence doit être donnée aux parcelles les plus petites. Cette conclusion confirme celle qui avait été mise en

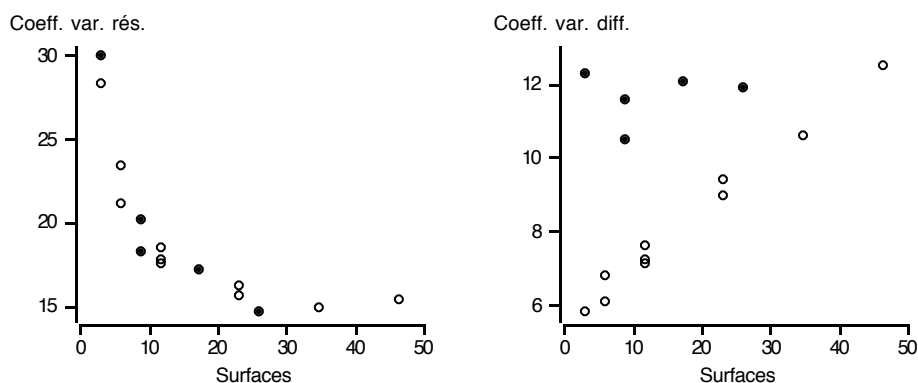


Figure 6.4.2. Planification d'une expérience sur théier : relations entre la surface des parcelles et le coefficient de variation résiduelle, d'une part, et entre la surface des parcelles et le coefficient de variation des différences de moyennes, d'autre part, pour des parcelles sans bordures (points blancs) et avec bordures (points noirs).

évidence au paragraphe 3.6.2.4°, et aussi le premier principe exposé au paragraphe 3.2.1.1°.

4° Discussion

Bien sûr, ces considérations théoriques ne doivent pas faire oublier les contingences pratiques et, dans cette optique, il serait sans doute excessif d'envisager la possibilité de réaliser une expérience qui comporterait 24 ou 48 blocs.

Dans la pratique courante, le choix de l'expérimentateur « traditionnel » se porterait vraisemblablement, a priori, sur un dispositif comportant quatre ou six blocs, mais il nous paraît opportun de voir néanmoins quel serait le gain de précision qui pourrait être attendu en faisant l'effort, s'il est réalisable, de passer à 12 blocs.

L'efficacité relative du dispositif n° 3 de la figure 6.4.1 (12 blocs) par rapport au dispositif n° 6 (six blocs), par exemple, peut être déterminée par une simple comparaison des carrés des coefficients de variation des différences de moyennes (tableau 6.4.2) :

$$9,4^2/7,2^2 = 1,70 \text{ ou } 170 \%,$$

ou avec plus de précision :

$$(16,2^2/6)/(17,6^2/12) = 1,69 \text{ ou } 169 \%.$$

Des résultats quasi identiques peuvent être obtenus en comparant le dispositif n° 5 (12 blocs également) et le dispositif n° 6 (efficacité relative égale à 168 %, au lieu de 169 %).

Ces différentes valeurs indiquent qu'il faudrait augmenter de près de 70 % le nombre de répétitions du dispositif n° 6, pour atteindre la précision du dispositif n° 3 ou du dispositif n° 5, c'est-à-dire aussi qu'il y a pratiquement équivalence entre les dispositifs 3 et 5 (60 parcelles de 16 théiers, soit 960 théiers), et 10 répétitions ($6 \times 1,70 = 10,2$) semblables à celles du dispositif n° 6 (50 parcelles de 32 théiers, soit 1.600 théiers).

Par rapport aux dispositifs 3 et 5, le choix de l'expérimentateur qui ne souhaiterait pas dépasser six répétitions est donc : adopter le dispositif n° 6, avec une perte d'efficacité de l'ordre de 40 % ($1/1,70 = 0,59$), ou vouloir conserver la même efficacité et organiser alors, si c'est possible, une expérience sensiblement plus étendue (1.150 m^2 au lieu de 690 m^2).

Ce type de comparaison conduirait à une conclusion plus nette encore pour le dispositif qui comporte quatre blocs (non représenté dans la figure 6.4.1), l'efficacité relative par rapport aux dispositifs 3 et 5 étant alors (tableau 6.4.2) :

$$10,6^2/7,2^2 \quad \text{ou} \quad (14,9^2/4)/(17,6^2/12) = 2,15 \text{ ou } 215 \text{ \%}.$$

Ces considérations, relatives évidemment à un cas bien particulier, mais loin d'être exceptionnel (des coefficients de variation résiduelle de l'ordre de 15 à 20 % ne sont en effet pas exceptionnels), montrent combien il peut être dangereux de s'en tenir de façon systématique à de petits nombres de répétitions (quatre, cinq ou six blocs), comme il est de pratique assez courante en matière agronomique.

5° Tests d'égalité des moyennes

Le même problème peut être envisagé sous l'angle de la puissance des tests d'égalité des moyennes. En se basant sur les relations approchées, et relativement optimistes, du paragraphe 3.4, il est en effet possible de déterminer, pour les différents cas envisagés, les différences de moyennes qu'on peut espérer mettre en évidence avec une probabilité égale à 0,5 ou 0,9, pour un niveau de signification égal à 0,05. Ces valeurs sont données dans la dernière colonne du tableau 6.4.2.

Il apparaît ainsi que, pour un dispositif expérimental comportant quatre blocs, on ne peut espérer mettre en évidence avec une probabilité égale à 0,5 que des différences de rendement de l'ordre de 21 %, et avec une probabilité égale à 0,9 des différences de l'ordre de 34 %, les valeurs correspondantes étant 19 et 30 % environ pour le dispositif n° 6 de la figure 6.4.1 (six blocs), et aussi 14 et 23 % environ pour le dispositif n° 3 (12 blocs). Les différences qui existent entre ces trois options sont, ici également, relativement importantes.

6.4.3 Parcelles avec bordures

1° Résultats

Tout ce qui vient d'être dit ne s'applique évidemment que si les parcelles d'expérience ne nécessitent pas de bordures, au sens où celles-ci ont été définies au

paragraphe 3.2.2, ce qui peut être très critiquable dans le cas d'une expérience de comparaison de fumures par exemple. Aussi, reprenons-nous l'ensemble du problème en supposant l'existence de bordures du type qui est illustré par la partie gauche de la figure 3.2.1 (une ligne complète de bordure entourant chaque parcelle, soit deux lignes complètes séparant les parties utiles ou mesurées des différentes parcelles). De telles bordures ne sont réalisables que dans le cas de parcelles suffisamment grandes, à savoir pour les dispositifs 5, 6, 8 et 9 de la figure 6.4.1 (3, 6 ou 12 blocs), ainsi que pour le dispositif qui comporte quatre blocs.

La détermination des variances ou des carrés moyens résiduels, des variances des différences de moyennes, etc. est plus délicate dans le cas présent et nous n'en donnons pas le détail. Nous faisons cependant figurer l'essentiel des résultats dans le tableau 6.4.3, qui est tout à fait comparable au tableau 6.4.2, les dimensions des parcelles et les nombres de théiers par parcelle étant des dimensions et des nombres de théiers « utiles », à l'exclusion des bordures.

Tableau 6.4.3. Planification d'une expérience sur théier : résultats de différents découpages du terrain dans le cas de parcelles avec bordures.

Numéros de la fig. 6.4.1	Dimensions des parcelles (m)	Nombres de théiers par parc.	Nombres de blocs	Coeff. de variation résiduelle	C. de var. des différ. de moy.	Efficacité relative (%)	Différences significat. (%)
5	2,4 × 1,2	4	12	30,0	12,3	291	25 à 40
6	7,2 × 1,2	12	6	18,2	10,5	595	21 à 34
8	2,4 × 3,6	12	6	20,1	11,6	534	23 à 38
–	4,8 × 3,6	24	4	17,1	12,1	579	24 à 39
9	7,2 × 3,6	36	3	14,6	11,9	855	24 à 39

Les valeurs du coefficient de variation résiduelle et du coefficient de variation des différences de moyennes sont également représentées graphiquement par les points noirs de la figure 6.4.2.

2° Discussion

Comme dans le cas des parcelles sans bordures, l'examen des résultats montre tout d'abord que le coefficient de variation résiduelle diminue progressivement et que l'efficacité relative augmente régulièrement quand la surface des parcelles s'accroît, et cela dans des proportions tout à fait comparables.

Mais les éléments les plus importants sont la manière dont le coefficient de variation des différences de moyennes se démarque du cas des parcelles sans bordures (figure 6.4.2) et la très grande stabilité de ce coefficient. Cette stabilité résulte du fait que l'augmentation de précision qu'on espère obtenir en fonction de l'augmentation du nombre de répétitions est compensée par une augmentation corrélative

de l'importance des bordures et, donc aussi, une réduction du nombre de théiers « utiles ».

On peut illustrer ce phénomène en comparant par exemple les dispositifs constitués respectivement de 4 et de 12 blocs, pour lesquels nous avons observé précédemment (sans bordures) une efficacité relative de 215 % en faveur du plus grand nombre de blocs. Dans le cas présent (avec bordures), l'efficacité relative de ces deux dispositifs est pratiquement égale à l'unité (tableau 6.4.3) :

$$12,1^2/12,3^2 \quad \text{ou} \quad (17,1^2/4)/(30,0^2/12) = 0,97 \text{ ou } 97 \text{ \%}.$$

Le gain de précision qu'on pouvait espérer obtenir en multipliant par 3 le nombre de blocs est pratiquement annulé par l'importance croissante des bordures et, de ce fait, une réduction considérable de la partie utile des parcelles. Pour quatre blocs en effet, chaque parcelle de 48 théiers comporte 24 théiers utiles et 24 théiers de bordure (50 % et 50 %), le nombre total de théiers utiles par objet étant égal à 96, tandis que pour 12 blocs, chaque parcelle de 16 théiers réunit quatre théiers utiles et 12 théiers de bordure (25 % et 75 %), le nombre total de théiers utiles étant égal à 48 seulement, soit deux fois moins.

3° Conclusion

En conséquence, et contrairement au cas précédent (parcelles sans bordures), l'expérimentateur pourrait augmenter ici la dimension des parcelles et réduire le nombre de blocs, si cela lui facilite la tâche, sans devoir craindre une perte de précision importante.

On notera toutefois que la sensibilité d'une expérience qui serait organisée dans de telles conditions serait en tout état de cause très faible. Au mieux, on peut en effet espérer mettre en évidence des différences de rendement de l'ordre de 20 à 25 % avec une probabilité égale à 0,5, et de l'ordre de 35 à 40 % seulement avec une probabilité égale à 0,9 (tableau 6.4.3).

6.5 Exemple 2 : expérience en blocs aléatoires complets (analyse de résultats)

6.5.1 Présentation et données

1° Présentation

Nous considérons, comme deuxième exemple de dispositif en blocs aléatoires complets, une expérience de comparaison de fumures réalisée au Rwanda, sur blé, dans des conditions de fertilité naturelle extrêmement faible [NEEL et DE PRINS, 1973].

Les objets qui ont été choisis sont présentés dans le tableau 6.5.1. Ils font intervenir quatre éléments fertilisants, à savoir l'azote (N), le potassium (K_2O), le phosphore (P_2O_5) et le calcium (Ca).

Tableau 6.5.1. Comparaison de fumures sur blé : structure des objets (différents engrais, en kg/ha).

Objets	N	K_2O	P_2O_5	Ca
1	–	–	–	–
2	–	–	–	1.000
3	–	–	–	4.500
4	–	–	–	8.000
5	100	200	–	1.000
6	100	200	–	4.500
7	100	200	–	8.000
8	100	200	100	1.000
9	100	200	100	4.500
10	100	200	100	8.000
11	100	200	200	1.000
12	100	200	200	4.500
13	100	200	200	8.000
14	100	200	300	1.000
15	100	200	300	4.500
16	100	200	300	8.000

Les objets 5 à 16 constituent une expérience factorielle 4×3 comportant, outre une fumure azotée et potassique de base, quatre niveaux de phosphore (0, 100, 200 et 300 kg/ha) et trois niveaux de calcium (1.000, 4.500 et 8.000 kg/ha). S'y ajoutent un témoin (objet 1) et trois fumures uniquement calciques (objets 2 à 4).

D'autre part, l'expérience est organisée dans une région de collines aménagées en terrasses, celles-ci étant séparées par des haies anti-érosives. Trois terrasses voisines, de 12 m de largeur, ont été choisies pour constituer trois blocs, et 16 parcelles, approximativement carrées et d'environ 5 m de côté, ont été délimitées sur chaque terrasse. Des sentiers ont également été prévus à intervalles réguliers et les 16 objets ont été répartis au hasard et indépendamment à l'intérieur de chacun des blocs.

La figure 6.5.1 donne le plan exact de l'expérience, à l'échelle de 1/600, les haies anti-érosives étant représentées en pointillé, et les photographies 5 et 6 [DAGNELIE, 2009] en offrent une autre illustration⁷.

⁷ Dans sa version électronique, la transmission du présent document en format PDF peut avoir pour conséquence de modifier quelque peu l'échelle de la figure 6.5.1.

16	2	7	9	8	10	6	4	Bloc 1
15	13	14	1	3	11	5	12	
14	10	12	3	5	9	1	16	Bloc 2
4	15	7	8	13	11	2	6	
7	2	10	5	15	6	11	9	Bloc 3
12	1	14	4	8	13	16	3	

Figure 6.5.1. Comparaison de fumures sur blé : plan de l'expérience.

2° Données

Dans chaque parcelle, la récolte a été réalisée sur une superficie de 18 m², en laissant des bordures de 30 à 50 cm de largeur, variant notamment en fonction de la forme exacte des parcelles.

Les rendements observés, en kg de grains par parcelle, et leurs moyennes, en kg par parcelle et en tonnes par hectare, sont présentés dans le tableau 6.5.2. On notera qu'une donnée est manquante, les moyennes correspondantes étant indiquées entre parenthèses⁸.

En vue d'un traitement par ordinateur, les données du tableau 6.5.1 et de la partie centrale du tableau 6.5.2 pourraient être présentées sous la forme d'un seul tableau, constitué de six colonnes et 48 lignes. Les six colonnes seraient alors relatives aux niveaux des quatre éléments fertilisants (ou aux indices qui leur seraient associés), aux numéros ou indices des blocs, et aux rendements observés, tandis que les différentes lignes correspondraient aux 48 parcelles.

6.5.2 Analyse des résultats : analyse de la variance⁹

1° Examen préliminaire

Un simple examen des résultats, aussi rapide soit-il, montre qu'il serait inutile, et même dangereux, de vouloir soumettre l'ensemble des données à une seule ana-

⁸ Une partie de ces données a déjà été considérée antérieurement [STAT2, ex. 11.2.4 et 12.2.2].

⁹ Un traitement complet de cet exemple à l'aide du logiciel R est présenté à l'adresse <www.dagnelie.be/docexr/exp065/exp065.htm>.

Tableau 6.5.2. Comparaison de fumures sur blé : rendements observés, en kg par parcelle, et moyennes, en kg par parcelle et en tonnes par ha¹⁰.

Objets	Blocs			Moyennes	
	1	2	3	(kg/p)	(t/ha)
1	0,00	0,04	0,06	0,03	0,02
2	0,14	0,22	0,35	0,24	0,13
3	0,42	0,45	0,44	0,44	0,24
4	0,44	0,28	0,84	0,52	0,29
5	0,28	0,49	0,33	0,37	0,20
6	1,09	1,17	0,84	1,03	0,57
7	0,79	0,94	0,82	0,85	0,47
8	1,30	0,80	2,01	1,37	0,76
9	2,05	2,37	2,52	2,31	1,29
10	2,07	2,60	2,25	2,31	1,28
11	–	2,36	2,71	(2,54)	(1,41)
12	2,99	2,92	3,63	3,18	1,77
13	2,62	2,89	3,43	2,98	1,66
14	2,61	2,06	3,29	2,65	1,47
15	3,22	2,93	3,85	3,33	1,85
16	3,15	3,35	3,67	3,39	1,88

lyse de la variance. Des différences considérables apparaissent en effet à vue d’œil, et il faut bien sûr éviter d’analyser, même avec l’une ou l’autre transformation de variables, des rendements observés allant de strictement 0 à près de 4 kg par parcelle (0 à plus de 2 t/ha).

Un examen un peu plus attentif montre que les rendements sont à la fois très faibles et très irréguliers pour les objets qui ne réunissent pas l’ensemble des quatre éléments fertilisants considérés (objets 1 à 7). Aussi avons-nous décidé de ne soumettre à l’analyse de la variance que les valeurs observées relatives aux objets 8 à 16, qui constituent un ensemble factoriel 3².

Le fait d’éliminer de l’analyse les objets 1 à 7 ne soulève aucune difficulté particulière dans le cas présent, ce qui ne serait pas vrai pour d’autres dispositifs que les blocs aléatoires complets (carré latin, blocs incomplets, etc.)¹¹.

La figure 6.5.2 présente les observations relatives aux objets 8 à 16 sous forme graphique, en relation avec les facteurs phosphore et calcium, toutes les données

¹⁰ Les rendements par hectare ne sont bien sûr que des valeurs tout à fait théoriques, dans la mesure où les haies anti-érosives dont il a été question dans la présentation de l’expérience occupent une partie importante du terrain.

¹¹ Si les rendements observés avaient été plus élevés pour les objets 5 à 7, on aurait aussi pu considérer l’ensemble des résultats relatifs aux objets 5 à 16, en conservant alors la structure factorielle 4 × 3.

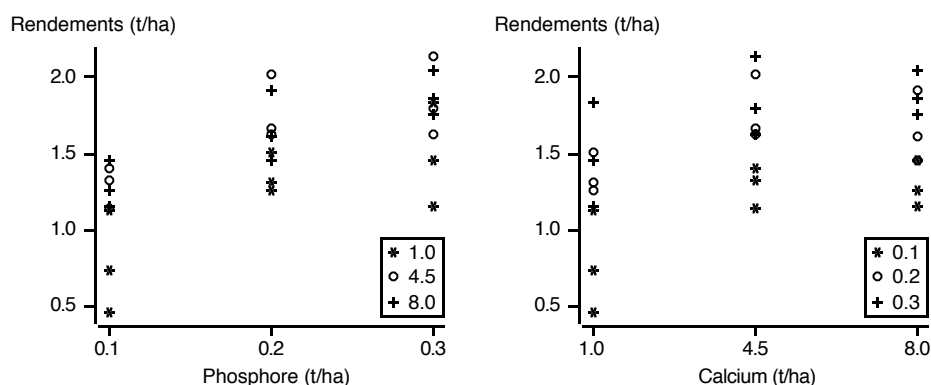


Figure 6.5.2. Comparaison de fumures sur blé : représentation graphique des observations relatives aux objets 8 à 16¹².

étant converties en tonnes par hectare. Les deux diagrammes mettent l'un et l'autre en évidence des différences sensibles entre les trois niveaux de fumure, en particulier pour le phosphore.

2° Analyse de la variance

En ce qui concerne l'analyse de la variance, nous avons choisi de présenter ici l'approche qui consiste à procéder à l'estimation de la donnée manquante. Nous reviendrons ultérieurement sur cette question (§ 12.4.2.4° et 12.4.4.3°).

Par la procédure habituelle [STAT2, § 10.4.3], on obtient la valeur estimée :

$$\hat{x} = [9(5,07) + 3(20,01) - 69,65]/16 = 2,25,$$

les quantités 5,07, 20,01 et 69,65 étant respectivement la somme des observations relatives à l'objet 11, la somme des observations relatives au bloc 1, et la somme générale, les deux dernières sommes étant limitées aux objets 8 à 16. En tenant compte du résultat ainsi obtenu, la moyenne qui concerne l'objet 11 devient 1,36 t/ha et la moyenne générale, toujours pour les objets 8 à 16, est égale à 1,48 t/ha.

L'analyse de la variance qui doit être réalisée correspond à un modèle croisé mixte à trois critères de classification, avec une seule observation par combinaison des trois facteurs [STAT2, § 11.2.4], les facteurs phosphore et calcium étant considérés comme fixes et le facteur blocs comme aléatoire. Les résultats de cette analyse sont donnés dans le tableau 6.5.3.

¹² Dans le diagramme de gauche, relatif au phosphore, les observations qui concernent le niveau inférieur de calcium (1 t/ha) sont représentées par des astérisques, les observations qui concernent le niveau intermédiaire de calcium (4,5 t/ha) par des points blancs, et les observations qui concernent le niveau supérieur de calcium (8 t/ha) par des signes +. Et il en est de même, *mutatis mutandis*, pour les niveaux de phosphore dans le diagramme de droite, relatif au calcium.

Tableau 6.5.3. Comparaison de fumures sur blé : tableau d'analyse de la variance.

Sources de variation	Degrés de liberté	Sommes des carrés des écarts	Carrés moyens	F	P
Phosphore	2	6,2949	3,1474	39,9 ***	0,0000
Calcium	2	3,5022	1,7511	22,2 ***	0,0000
Interaction	4	0,1525	0,0381	0,48	0,75
Blocs	2	1,9191	0,9596		
Variation résiduelle	15	1,1820	0,0788		
Totaux	25	13,0507			

Dans ce tableau, les trois interactions qui font intervenir le facteur blocs ont été regroupées en une composante « résiduelle » unique, comme nous l'avons indiqué au paragraphe 6.2.2°, et un degré de liberté a été supprimé en raison de l'estimation de la donnée manquante [STAT2, § 10.4.3].

3° Interprétation

L'examen du tableau 6.5.3 montre que les deux facteurs pris en considération (phosphore et calcium) sont très hautement significatifs et que leur interaction est tout à fait négligeable. Chacun des deux facteurs peut en conséquence être éventuellement étudié séparément.

Il apparaît aussi que l'efficacité relative du dispositif en blocs aléatoires complets par rapport à une répartition tout à fait aléatoire est, en première approximation, proche de 230 % :

$$[(1,9191 + 1,1820)/(2 + 15)]/0,0788 = 2,31 \text{ ou } 231 \text{ \%}.$$

Ceci signifierait que les trois répétitions en blocs aléatoires complets donnent une information quasi équivalente à celle qui proviendrait de sept répétitions complètement aléatoires ($3 \times 2,31 \simeq 7$).

La valeur obtenue est cependant assez largement surestimée, un calcul plus précis, qui serait basé sur les relations du paragraphe 6.3.3°, conduisant à un résultat proche de 190 %. La différence entre les deux valeurs est essentiellement la conséquence du fait qu'on ne dispose que d'un très petit nombre de blocs. Il serait donc plus correct de parler d'une équivalence entre trois blocs aléatoires complets et six répétitions complètement aléatoires ($3 \times 1,90 \simeq 6$).

D'autre part, il faut noter aussi que les résultats obtenus par l'analyse de la variance non orthogonale, par l'analyse de la covariance et à l'aide du modèle linéaire mixte sont fort semblables à ceux présentés ici (§ 12.4.2.4° et 12.4.4.3°).

4° Analyse complémentaire

Pour chacun des deux facteurs, il est possible de compléter l'analyse de la variance en subdivisant l'influence du facteur considéré en une contribution linéaire et une contribution non linéaire ou quadratique. Cela peut être réalisé soit par la méthode des polynômes orthogonaux [STAT2, § 12.2.3], soit par un calcul de régression simple [STAT2, § 14.5.3]. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 6.5.4.

Tableau 6.5.4. Comparaison de fumures sur blé : tableau d'analyse de la variance, après subdivision des sommes des carrés des écarts factorielles.

Sources de variation	Degrés de liberté	S. des carrés des écarts	Carrés moyens	F	P
Phosphore	2	6,2949	3,1474	39,9 ***	0,0000
Régression linéaire	1	5,7348	5,7348	72,8 ***	0,0000
Régression quadrat.	1	0,5601	0,5601	7,11 *	0,018
Calcium	2	3,5022	1,7511	22,2 ***	0,0000
Régression linéaire	1	2,4494	2,4494	31,1 ***	0,0001
Régression quadrat.	1	1,0528	1,0528	13,4 **	0,0023
Interaction	4	0,1525	0,0381	0,48	0,75
Blocs	2	1,9191	0,9596		
Variation résiduelle	15	1,1820	0,0788		
Totaux	25	13,0507			

Il apparaît ainsi, non seulement que les deux facteurs considérés ont une influence très hautement significative sur le rendement, mais aussi que, dans les deux cas, leur influence n'est pas simplement linéaire. Ce résultat confirme une impression que pouvaient donner les deux diagrammes de la figure 6.5.2.

6.5.3 Analyse des résultats : régression

1° Deux facteurs considérés séparément

L'analyse de la variance peut avantageusement être complétée par une étude de régression, mettant en relation le rendement et les deux facteurs envisagés. Dans un premier temps, nous considérons séparément les deux facteurs.

Comme les composantes linéaires et quadratiques de l'analyse de la variance sont significatives (tableau 6.5.4), il paraît judicieux de procéder à l'ajustement d'équations du deuxième degré. De tels ajustements peuvent être réalisés par la méthode des polynômes orthogonaux [STAT2, § 12.2.3] ou par régression multiple [STAT2, § 16.2].

On obtient ainsi les équations de régression suivantes, d'une part pour le phosphore :

$$\text{Rdt} = 0,2858 + 9,934\text{P} - 16,99\text{P}^2,$$

et d'autre part pour le calcium :

$$\text{Rdt} = 0,9863 + 0,2296\text{Ca} - 0,01900\text{Ca}^2,$$

toutes les variables étant exprimées en tonnes par hectare¹³.

La figure 6.5.3 représente les deux courbes de réponse ainsi définies, passant chacune par les trois points moyens correspondants, à savoir des rendements moyens égaux à 1,11, 1,59 et 1,74 t/ha pour les trois niveaux de phosphore, et 1,20, 1,63 et 1,61 t/ha pour les trois niveaux de calcium.

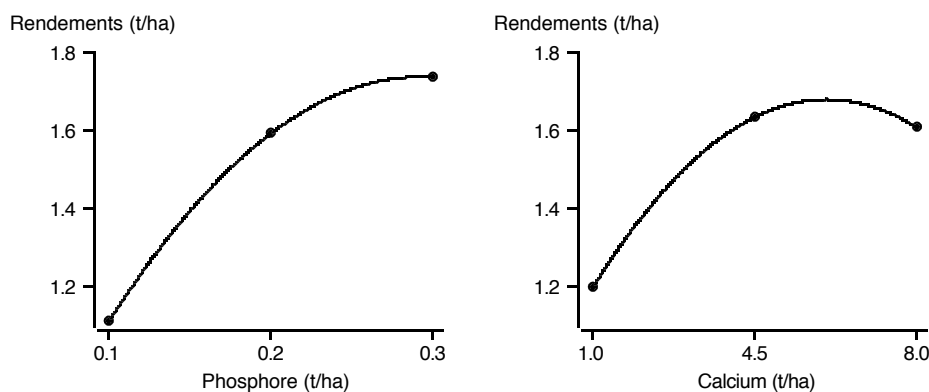


Figure 6.5.3. Comparaison de fumures sur blé : courbes de réponse relatives au phosphore et au calcium.

2° Rendement maximum

Les abscisses des maximums des deux courbes de réponse peuvent être calculées de la manière suivante, en annulant les dérivées du rendement par rapport au phosphore et au calcium :

$$\text{P} = -9,934/[2(-16,99)] = 0,292 \quad \text{et} \quad \text{Ca} = -0,2296/[2(-0,01900)] = 6,04.$$

On peut en conclure que le rendement maximum correspond à un apport d'environ 300 kg d'acide phosphorique et 6 tonnes de chaux par hectare. On remarquera qu'on se trouve à la limite du domaine expérimental dans le premier cas et en un point plus central dans le deuxième cas, ce qu'indique également la figure 6.5.3.

¹³ Par souci de cohérence avec les résultats de l'analyse de la variance, les différents calculs de régression ont été effectués en faisant intervenir la valeur estimée 2,25, qui remplace la donnée manquante.

Il faut toutefois interpréter de telles informations avec prudence, car si l'ajustement parabolique convient bien sûr parfaitement à un ensemble de trois points observés en abscisses, il est certain aussi qu'une telle fonction n'est pas nécessairement la meilleure pour représenter la réalité des phénomènes étudiés. En particulier, pour cette raison, aucune extrapolation ne doit être faite en dehors du domaine expérimental étudié.

D'autre part, la recherche d'un rendement maximum peut être éminemment contestable au point de vue pratique. Le plus souvent en effet, l'obtention des « derniers kilos » de production nécessite un apport d'engrais (ou, dans d'autres situations, de substances de croissance, de produits phytosanitaires, etc.) qui peut s'avérer extrêmement coûteux.

3° Fumure optimale

Très souvent, l'objectif réel est en fait la recherche d'un rendement optimum, mais il est difficile de traiter ce problème de façon générale, car sa solution dépend chaque fois des conditions économiques locales et, fréquemment aussi, d'autres facteurs tels que les possibilités d'approvisionnement, de commercialisation, etc.

À titre d'exemple, nous envisageons tout d'abord le problème pour la fumure phosphorique, en faisant la supposition, tout à fait arbitraire, que le coût de l'apport supplémentaire d'un kilogramme d'acide phosphorique est égal à trois fois le bénéfice lié à la production supplémentaire d'un kilogramme de blé (1 kg d'engrais phosphorique peut être « payé » par 3 kg de blé).

Dans ces conditions, le point d'équilibre entre l'accroissement des recettes et l'accroissement des dépenses est celui pour lequel l'accroissement du rendement est égal à trois fois l'accroissement de la fumure :

$$\Delta Rdt = 3 \Delta P,$$

ou encore, en termes de dérivée, le point de la courbe de réponse pour lequel la dérivée est égale à 3 :

$$dRdt/dP = 3.$$

Cette dérivée étant :

$$dRdt/dP = 9,934 - 2(-16,99)P,$$

on obtient comme valeur optimale de la fumure phosphorique :

$$P = (3 - 9,934)/[2(-16,99)] = 0,204,$$

soit environ 200 kg/ha, au lieu de 290 ou 300 kg/ha pour le rendement maximum.

On aboutit strictement au même résultat en considérant que le rendement en blé, diminué du coût relatif de la fumure phosphorique, est :

$$Rdt = 0,2858 + 6,934P - 16,99P^2,$$

la valeur 9,934 étant diminuée de 3 unités, et en déterminant ensuite l'abscisse du maximum de cette fonction.

Quant au deuxième facteur, si de manière tout aussi arbitraire, on suppose que le coût de l'apport supplémentaire d'un kilogramme de chaux est égal au dixième du bénéfice lié à la production supplémentaire d'un kilogramme de blé (1 kg de blé peut « payer » 10 kg de chaux), on obtient de la même façon :

$$Ca = (0,1 - 0,2296)/[2(-0,01900)] = 3,41,$$

soit un apport optimal de chaux de l'ordre de 3,4 t/ha, au lieu de 6 t/ha¹⁴.

On pourrait aussi assortir les valeurs ainsi obtenues de limites de confiance [STAT2, § 15.2.2], de même qu'on pourrait utiliser d'autres types de courbes de réponse et d'autres méthodes de calcul [ANTONIADOU et WALLACH, 2000; HERMANDEZ et MULLA, 2008].

4° Deux facteurs considérés simultanément

On peut, par régression multiple, considérer simultanément les deux facteurs étudiés, et il serait d'ailleurs indispensable de procéder de la sorte en présence d'une interaction significative. Comme nous l'avons déjà signalé à propos des surfaces de réponse (§ 2.4.1.1°), l'équation de régression fait alors intervenir les deux facteurs, leurs carrés et leur produit.

On obtient ici :

$$Rdt = -0,2788 + 10,29 P + 0,2454 Ca - 16,99 P^2 - 0,01900 Ca^2 - 0,07929 P Ca,$$

les trois variables Rdt, P et Ca étant toujours exprimées en tonnes par hectare.

Le maximum de rendement et la fumure correspondante peuvent être déterminés en annulant les dérivées partielles du rendement par rapport aux deux facteurs, et en résolvant le système de deux équations à deux inconnues qui est ainsi obtenu.

On pourrait aussi calculer une fumure optimale en procédant de la même façon à partir de l'équation modifiée comme précédemment :

$$Rdt = -0,2788 + 7,29 P + 0,1454 Ca - 16,99 P^2 - 0,01900 Ca^2 - 0,07929 P Ca,$$

le coefficient de P étant diminué de 3 unités, de façon toujours arbitraire, à titre d'exemple, et le coefficient de Ca de 1/10.

5° Courbes d'isoreponse

Une solution plus simple et plus visuelle du problème consiste à considérer la surface de réponse qui correspond à l'équation de régression, dans l'espace à

¹⁴ On peut noter que les résultats auraient été très peu différents (0,203 au lieu de 0,204, et 3,45 au lieu de 3,41) si on n'avait pas tenu compte de la valeur estimée 2,25 utilisée en analyse de la variance.

trois dimensions (P, Ca, Rdt), et à déterminer sur cette surface des courbes d'égal rendement. Ces courbes, qui s'apparentent à des courbes de niveau, sont appelées d'une manière générale *courbes d'isoreponse*¹⁵.

La figure 6.5.4 donne la représentation graphique de la projection de telles courbes dans le plan (P, Ca), d'une part pour la surface qui correspond à l'équation de régression initiale, c'est-à-dire au rendement maximum, et d'autre part pour la surface qui correspond à l'équation de régression modifiée, c'est-à-dire à la fumure optimale.

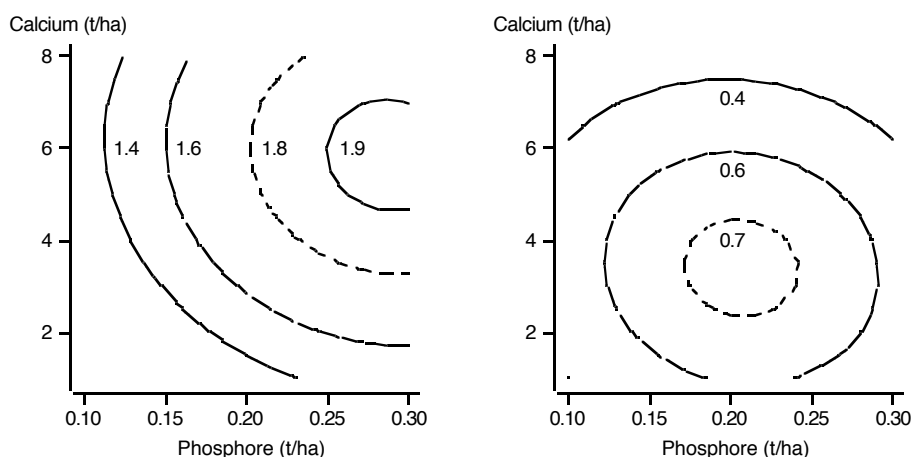


Figure 6.5.4. Comparaison de fumures sur blé : courbes d'isoreponse pour les rendements non modifiés et modifiés (en t/ha), en fonction du phosphore et du calcium.

Le premier diagramme confirme la localisation du maximum aux environs de 0,3 et 6 tonnes d'engrais par hectare, respectivement pour le phosphore et pour le calcium, tandis que le second diagramme localise l'optimum à proximité de 0,2 et 3,5 tonnes d'engrais par hectare.

Il faut noter qu'en présence d'une interaction relativement importante, et contrairement à ce qui est observé ici, les résultats obtenus en considérant les deux variables simultanément pourraient être sensiblement différents des résultats obtenus en considérant les deux variables séparément.

Nous terminons en ajoutant que le problème de la détermination de régions de confiance pour des conditions optimales relatives à deux ou plusieurs facteurs est envisagé notamment par DEL CASTILLO et CAHYA [2001].

¹⁵ En anglais : *isoresponse curve, contour curve*.